

1914.

LIBRARY  
MICHIGAN STATE NORMAL  
COLLEGE.

No. 20.

# ANNALEN DER PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON

P. G. OER, L. W. GILBERT, J. C. FOSSENDORFF, u. a. R. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTHE FOLGE.

Band 45. Heft 4.

DER GANZEN REIHE 220. BAND UND HEFT.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE,  
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT EINER TAFEL.



LEIPZIG, 1914.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.  
DÖRRRIENSTRASSE 16.

*Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den  
Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den  
in 24 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 54 M.*

*(Ausgegeben am 1. Oktober 1914.)*

# Inhalt.

	Seite
1. August Wiegrefe. Neue Lichtströmungen bei Totalreflexion. Beiträge zur Diskussion des Poyntingschen Satzes . . . . .	465
2. Friedrich Kottler. Fallende Bezugssysteme vom Standpunkte des Relativitätsprinzips . . . . .	481
3. H. Lunelund. Intensitätsverhältnisse lang- und kurzwelliger elektrischer Komponenten der Serienlinien des Wasserstoffs. . . . .	517
4. Günther Neumann. Die träge Masse schnell bewegter Elektronen. (Hiersu Tafel IV.) . . . . .	529
5. Karl P. Lindman. Über elektrische und optische Resonanz . . . . .	580
6. M. v. Smoluchowski. Bemerkung zu der Arbeit B. Baules: „Theoretische Behandlung der Erscheinungen in verdünnten Gasen“ . . . . .	620

Die Redaktion der Annalen wird von den unseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Würzburg, Pleicherring 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl anzuführen.

# ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 45.

**1. Neue Lichtströmungen bei Totalreflexion.  
Beiträge zur Diskussion des Poyntingschen  
Satzes;  
von August Wiegrefe.**

Im folgenden übergebe ich theoretische Erörterungen der Veröffentlichung, die im wesentlichen schon vor der Arbeit der Herren Cl. Schaefer und G. Groß<sup>1)</sup> entstanden sind, und zwar im Winter 1909/10, in dem ich auch die auf die Totalreflexion bezüglichen Eichenwaldschen Resultate<sup>2)</sup>, die u. a. in der eben genannten Arbeit mitgeteilt werden, ohne deren Kenntnis gewonnen hatte. Die Veröffentlichung unterblieb damals aus äußeren Gründen. Hr. W. Voigt hatte aber die Liebesswürdigkeit, auf meine Darstellung — ohne Namensnennung — in einer Antwort an Hrn. Eichenwald<sup>3)</sup> hinzuweisen. In seiner dahingehenden Bemerkung ist allerdings insofern ein kleiner Irrtum eingeschlossen, als er die den Eichenwaldschen Erörterungen entsprechenden Bestimmungen der Energieströmungen im zweiten Medium zweien seiner Schüler zuspricht. Nur meine Überlegungen bezogen sich auf die unbegrenzte Ebene, auf die sich auch die Herren Eichenwald, Schaefer und Groß beschränken.

Die folgende Arbeit wird sich mit der Totalreflexion beliebig geradlinig polarisierter ebener Wellen befassen, bei denen also weder der elektrische noch der magnetische Vektor senkrecht zur Einfallsebene schwingt. Bislang sind immer nur diese beiden Spezialfälle des einfallenden Lichtes untersucht worden.

1) Cl. Schaefer u. G. Groß, Ann. d. Phys. 32. p. 649. 1910.

2) A. Eichenwald, Ann. d. Mosk. Kais. Ing.-Hochschule, p. 15—41, April 1908; Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. 41. Phys. Teil, p. 131—154, 1909; Festschrift für Heinrich Weber p. 37—56. 1912; Ann. d. Phys. 35. p. 1037. 1911.

3) W. Voigt, Ann. d. Phys. 34. p. 797. 1911.

Aus ihnen läßt sich ja der allgemeine Fall hinsichtlich der Kraftkomponenten ohne weiteres aufbauen, und das ist auch wohl der Grund gewesen, weshalb die allgemeine lineare Polarisation selbst nie mitbetrachtet ist. Für die Komponenten des Poyntingschen Vektors und damit auch für die Energieströmungen ergibt sich indes doch ein erhebliches Abweichen von den spezialisierten Fällen.

Wir werden im folgenden trotz der von Hrn. Voigt geäußerten Bedenken<sup>1)</sup> die Totalreflexion für die *unbegrenzte* Ebene betrachten, da schon auf dieser Grundlage manche strittigen Punkte in anderem Lichte erscheinen werden. Wie bereits der Titel dieser Arbeit sagt, soll dann weiterhin der Poyntingsche Vektor  $\mathcal{S}$  zur Besprechung der Lichtströmungen im dichteren und dünneren Medium herangezogen werden, wie es ja auch Hr. Eichenwald getan hat. Die Anwendbarkeit dieses Vektors unterliegt ja Einschränkungen und gibt zu manchen merkwürdigen Konsequenzen Veranlassung.<sup>2)</sup> Gänzlich ablehnen kann man ihn aber deswegen nicht.<sup>3)</sup> Unter diesen Umständen muß es gerade interessieren, Material zu einer möglichst weitgehenden Diskussion des Poyntingschen Satzes heranzuschaffen. Wir wollen nicht vergessen, hier noch zu erwähnen, daß die Herren W. v. Ignatowsky und E. Oettinger gerade aus Arbeiten über die Totalreflexion<sup>4)</sup> mit großer Wahrscheinlichkeit den Poyntingschen Vektor als das Bestimmende bei photometrischen Versuchen bzw. bei den Lichtwirkungen im Auge nachzuweisen vermochten. Und dabei wird diese Entscheidung überdies noch mit dem ins dünnere Medium eindringenden Licht herbeigeführt.

#### § 1. Die Formeln für die Komponenten des Poyntingschen Vektors.

Wir legen zwei durchsichtige, isotrope, unendlich ausgedehnte Medien I und II zugrunde, die mit einer unbegrenzten

1) W. Voigt, Ann. d. Phys. 67. p. 185. 1899; 34. p. 797. 1911; 36. p. 866. 1911.

2) Vgl. z. B. M. Abraham u. A. Föppl, Theorie der Elektrizität I. p. 324. 4. Aufl. 1912.

3) M. Abraham u. A. Föppl, l. c. p. 326.

4) W. v. Ignatowsky, Ann. d. Phys. 37. p. 901. 1912; W. v. Ignatowsky u. E. Oettinger, Ann. d. Phys. 37. p. 911. 1912.



Ebene aneinanderstoßen. Die einfarbige Lichtquelle mit der Periode  $\tau$  der ausgesandten Schwingungen liege im Unendlichen des I., optisch dichteren Mediums, der Zustand sei stationär. Die Einfallsebene der ebenen, homogenen Wellen sei die  $xy$ -Ebene,  $y$  dabei die Normale auf der Trennungsfläche  $xz$ , und zwar positiv im I. Medium. Einfallswinkel  $\varphi_0$  und Brechungswinkel  $\psi_0$  seien von der positiven  $X$ -Achse

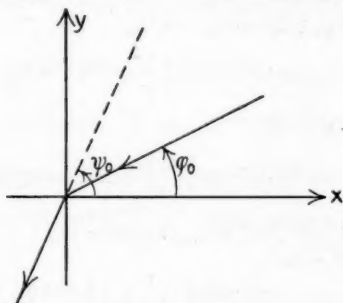


Fig. 1.

abgerechnet, so daß ihre Größe durch  $0 \leq \varphi_0 \leq \pi$  und  $0 \leq \psi_0 \leq \pi$  begrenzt ist (Fig. 1). Das Brechungsgesetz drückt sich dann durch

$$k_I \cos \varphi_0 = k_{II} \cos \psi_0$$

aus, wenn wir unsere beiden Medien durch

$$k_I = \frac{2\pi}{\lambda_I} = \frac{2\pi}{c \cdot \tau} \sqrt{\epsilon_I \mu_I}, \quad k_{II} = \frac{2\pi}{\lambda_{II}} = \frac{2\pi}{c \cdot \tau} \sqrt{\epsilon_{II} \mu_{II}}$$

charakterisieren.  $\lambda_I, \lambda_{II}$  sind die Wellenlänge,  $\epsilon_I, \epsilon_{II}$  bzw.  $\mu_I, \mu_{II}$  die Dielektrizitäts- bzw. Magnetisierungskonstanten der beiden Medien,  $c$  bedeutet die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum, und es ist  $\mu_I = \mu_{II} = 1$  zu setzen.

Wir wollen die Formeln für die elektrische und magnetische Kraft sogleich für die Totalreflexion hinschreiben, indem wir aus dem Brechungsgesetze

$$\sin \psi_0 = -i \sqrt{\frac{k_I^2}{k_{II}^2} \cos^2 \varphi_0 - 1} \quad ^1)$$

1) Vgl. P. Drude, Lehrbuch der Optik; A. Wiegrefe, Dissertation, p. 86. Göttingen 1912; A. Wiegrefe, Ann. d. Phys. 44. p. 287. 1914.

entnehmen. Wir setzen lediglich das gebrochene Licht hierher:

$$X_g = \frac{2k_1 \sin \varphi_0 \sqrt{k_1^2 \cos^2 \varphi_0 - k_{II}^2}}{\sqrt{k_{II}^4 \sin^2 \varphi_0 + k_1^4 \cos^2 \varphi_0 - k_1^2 k_{II}^2}} \cdot e^{y \sqrt{k_1^2 \cos^2 \varphi_0 - k_{II}^2}} \cdot G \cdot \cos \left[ \frac{2\pi t}{\tau} + x k_1 \cos \varphi_0 + \vartheta_g - \pi/2 \right],$$

$$Y_g = - \frac{2k_1^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0}{\sqrt{k_{II}^4 \sin^2 \varphi_0 + k_1^4 \cos^2 \varphi_0 - k_1^2 k_{II}^2}} \cdot e^{y \sqrt{k_1^2 \cos^2 \varphi_0 - k_{II}^2}} \cdot G \cdot \cos \left[ \frac{2\pi t}{\tau} + x k_1 \cos \varphi_0 + \vartheta_g \right],$$

$$Z_g = \frac{2k_1 \sin \varphi_0}{\sqrt{k_1^2 - k_{II}^2}} \cdot e^{y \sqrt{k_1^2 \cos^2 \varphi_0 - k_{II}^2}} \cdot F \cdot \cos \left[ \frac{2\pi t}{\tau} + x k_1 \cos \varphi_0 + \delta_g \right],$$

$$A_g = \frac{2k_1 \sin \varphi_0 \sqrt{\varepsilon_1 \cos^2 \varphi_0 - \varepsilon_{II}}}{\sqrt{k_1^2 - k_{II}^2}} \cdot e^{y \sqrt{k_1^2 \cos^2 \varphi_0 - k_{II}^2}} \cdot F \cdot \cos \left[ \frac{2\pi t}{\tau} + x k_1 \cos \varphi_0 + \delta_g + \pi/2 \right],$$

$$B_g = \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \frac{2k_1 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0}{\sqrt{k_1^2 - k_{II}^2}} \cdot e^{y \sqrt{k_1^2 \cos^2 \varphi_0 - k_{II}^2}} \cdot F \cdot \cos \left[ \frac{2\pi t}{\tau} + x k_1 \cos \varphi_0 + \delta_g \right],$$

$$C_g = \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \frac{2k_{II}^2 \sin \varphi_0}{\sqrt{k_{II}^4 \sin^2 \varphi_0 + k_1^4 \cos^2 \varphi_0 - k_1^2 k_{II}^2}} \cdot e^{y \sqrt{k_1^2 \cos^2 \varphi_0 - k_{II}^2}} \cdot G \cdot \cos \left[ \frac{2\pi t}{\tau} + x k_1 \cos \varphi_0 + \vartheta_g \right].$$

Der resultierende elektrische Vektor des *einfallenden* Lichtes hat dabei die Amplitude  $\sqrt{F^2 + G^2}$ . Die von Hrn. Eichenwald behandelten Spezialfälle der Polarisierung erhalten wir durch  $F = 0$  bzw.  $G = 0$ . Die Phasenverzögerungen  $\delta$  und  $\vartheta$  lassen sich aus ihren Sinus und Kosinus bestimmen:

$$\cos \delta_g = \frac{k_1 \sin \varphi_0}{\sqrt{k_1^2 - k_{II}^2}}, \quad \sin \delta_g = \frac{\sqrt{k_1^2 \cos^2 \varphi_0 - k_{II}^2}}{\sqrt{k_1^2 - k_{II}^2}},$$

$$\cos \vartheta_g = \frac{k_{II}^2 \sin \varphi_0}{\sqrt{k_{II}^4 \sin^2 \varphi_0 + k_1^4 \cos^2 \varphi_0 - k_1^2 k_{II}^2}},$$

$$\sin \vartheta_g = \frac{k_1 \sqrt{k_1^2 \cos^2 \varphi_0 - k_{II}^2}}{\sqrt{k_{II}^4 \sin^2 \varphi_0 + k_1^4 \cos^2 \varphi_0 - k_1^2 k_{II}^2}}.$$

Die Komponenten des Poyntingschen Vektors wollen wir sowohl für das einfallende wie reflektierte und gebrochene Licht bilden:

$$\mathfrak{E}_x = -\frac{c}{4\pi} \sqrt{\epsilon_1} \cos \varphi_0 (F^2 + G^2) \cos^2 \left[ \frac{2\pi t}{\tau} + k_1 (x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0) \right],$$

$$\mathfrak{E}_y = -\frac{c}{4\pi} \sqrt{\epsilon_1} \sin \varphi_0 (F^2 + G^2) \cos^2 \left[ \frac{2\pi t}{\tau} + k_1 (x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0) \right],$$

$$\mathfrak{E}_z = 0,$$

$$\mathfrak{E}_x = -\frac{c}{4\pi} \sqrt{\epsilon_1} \cos \varphi_0 \left\{ F^2 \cos^2 \left[ \frac{2\pi t}{\tau} + k_1 (x \cos \varphi_0 - y \sin \varphi_0) + \delta_r \right] \right. \\ \left. + G^2 \cos^2 \left[ \frac{2\pi t}{\tau} + k_1 (x \cos \varphi_0 - y \sin \varphi_0) + \vartheta_r \right] \right\},$$

$$\mathfrak{E}_y = +\frac{c}{4\pi} \sqrt{\epsilon_1} \sin \varphi_0 \left\{ F^2 \cos^2 \left[ \frac{2\pi t}{\tau} + k_1 (x \cos \varphi_0 - y \sin \varphi_0) + \delta_r \right] \right. \\ \left. + G^2 \cos^2 \left[ \frac{2\pi t}{\tau} + k_1 (x \cos \varphi_0 - y \sin \varphi_0) + \vartheta_r \right] \right\},$$

$$\mathfrak{E}_z = 0,$$

$$\mathfrak{E}_x = -\frac{c}{4\pi} \sqrt{\epsilon_1} \cos \varphi_0 (2k_1 \sin \varphi_0)^2 e^{2y \sqrt{k_1^2 \cos^2 \varphi_0 - k_{II}^2}} \left\{ \frac{F^2}{k_1^2 - k_{II}^2} \right. \\ \left. \cos^2 \left[ \frac{2\pi t}{\tau} + x k_1 \cos \varphi_0 + \delta_g \right] + \frac{G^2 k_{II}^2}{k_{II}^4 \sin^2 \varphi_0 + k_1^4 \cos^2 \varphi_0 - k_1^2 k_{II}^2} \right. \\ \left. \cos^2 \left[ \frac{2\pi t}{\tau} + x k_1 \cos \varphi_0 + \vartheta_g \right] \right\},$$

$$\mathfrak{E}_y = -\frac{c}{8\pi} \sqrt{\epsilon_1} \cos^2 \varphi_0 - \epsilon_{II} (2k_1 \sin \varphi_0)^2 e^{2y \sqrt{k_1^2 \cos^2 \varphi_0 - k_{II}^2}} \left\{ \frac{F^2}{k_1^2 - k_{II}^2} \right. \\ \left. \sin 2 \left[ \frac{2\pi t}{\tau} + x k_1 \cos \varphi_0 + \delta_g \right] + \frac{G^2 k_{II}^2}{k_{II}^4 \sin^2 \varphi_0 + k_1^4 \cos^2 \varphi_0 - k_1^2 k_{II}^2} \right. \\ \left. \sin 2 \left[ \frac{2\pi t}{\tau} + x k_1 \cos \varphi_0 + \vartheta_g \right] \right\},$$

$$\mathfrak{E}_z = +\frac{c}{4\pi} \sqrt{\epsilon_1} \cos \varphi_0 (2k_1 \sin \varphi_0)^2 \frac{k_{II} \sin \varphi_0 (k_1^2 \cos^2 \varphi_0 - k_{II}^2)}{k_{II}^4 \sin^2 \varphi_0 + k_1^4 \cos^2 \varphi_0 - k_1^2 k_{II}^2} \\ \cdot e^{2y \sqrt{k_1^2 \cos^2 \varphi_0 - k_{II}^2}} \cdot F \cdot G.$$

Die Phasenverzögerungen  $\delta_r$  und  $\vartheta_r$  kann man entnehmen aus:

$$\cos \delta_r = \frac{k_{II}^2 - k_1^2 + 2k_1^2 \sin^2 \varphi_0}{k_1^2 - k_{II}^2}, \quad \sin \delta_r = \frac{2k_1 \sin \varphi_0 \sqrt{k_1^2 \cos^2 \varphi_0 - k_{II}^2}}{k_1^2 - k_{II}^2},$$

$$\cos \vartheta_r = \frac{k_{II}^4 \sin^2 \varphi_0 - k_1^4 \cos^2 \varphi_0 + k_1^2 k_{II}^2}{k_{II}^4 \sin^2 \varphi_0 + k_1^4 \cos^2 \varphi_0 - k_1^2 k_{II}^2},$$

$$\sin \vartheta_r = \frac{2k_1 k_{II}^2 \sin \varphi_0 \sqrt{k_1^2 \cos^2 \varphi_0 - k_{II}^2}}{k_{II}^4 \sin^2 \varphi_0 + k_1^4 \cos^2 \varphi_0 - k_1^2 k_{II}^2}.$$

§ 2. Der Einfluß der Polarisation auf die Komponenten des Poyntingschen Vektors.

Die Komponenten  $\mathcal{E}_x$  und  $\mathcal{E}_y$  sind beim einfallenden Licht wie gewöhnlich durch das Quadrat eines Kosinus dargestellt. Das gilt nicht mehr für das reflektierte Licht, wenn  $F$  und  $G$  von Null verschieden sind:  $\mathcal{E}_x$ ,  $\mathcal{E}_y$  und damit  $\mathcal{E}$  selbst können nicht mehr durch Spezialwerte von  $xyt$  zu Null werden. Die auffallendste Eigentümlichkeit zeigen aber die Komponenten des Poyntingschen Vektors im II. Medium: Während für  $F = 0$  oder  $G = 0$  nur  $\mathcal{E}_x$  und  $\mathcal{E}_y$  von Null verschieden sind, tritt hier noch eine Komponente  $\mathcal{E}_z$  auf, die überdies von  $xy$  und  $t$  ganz unabhängig ist, also nur durch spezielle Wahl von  $\varphi_0$  und  $y$  Null werden kann. Das geschieht aber lediglich im Unendlichen des II. Mediums, für streifenden Einfall des Lichtes und beim Grenzwinkel der Totalreflexion. Weiterhin kann auch  $\mathcal{E}_x$  für unseren allgemeinen Fall der Polarisation nicht mehr durch  $x$  und  $t$  verschwinden;  $\mathcal{E}_y$  vermag dagegen sehr wohl ähnlich wie in den Spezialfällen  $F = 0$  oder  $G = 0$  Null zu werden, ja sogar wiederum sein Vorzeichen zu wechseln, wie man durch eine leichte Umrechnung erkennen kann. Nach dieser wird  $\mathcal{E}_y$  für

$$\frac{2\pi t}{\tau} + x k_1 \cos \varphi_0 + d_g = \frac{h\pi}{2}$$

zu Null, d. h. für mit der Zeit wandernde Ebenen senkrecht zur Grenzfläche.  $d_g$  bezeichnet dabei eine Phasenverzögerung in  $\mathcal{E}_y$ , die sich in ziemlich komplizierter Weise aus  $\delta_g$  und  $\vartheta_g$ ,  $F$  und  $G$  berechnet.

Die Richtung von  $\mathcal{E}_x$  und damit auch von  $\mathcal{E}$  selbst ist für  $0 < \varphi_0 < \pi/2$  nach positivem  $z$ , für  $\pi/2 < \varphi_0 < \pi$  nach negativem  $z$  hin gerichtet, tritt mithin bei Betrachtung von der Seite des einfallenden Lichtes her stets nach links aus der Einfallsebene heraus, hängt also nicht etwa von der durch das Verhältnis  $F:G$  definierten Lage der Polarisationsebene ab.

Mathematisch ist das Auftreten eines von Null verschiedenen  $\mathcal{E}_z$  dadurch bedingt, daß  $X$  gegenüber  $Y$  und  $A$  gegenüber  $B$  je eine Phasendifferenz von  $\pi/2$  aufweisen, und daß  $\delta_g$  und  $\vartheta_g$ ,

verschieden ist für alle  $\varphi_0$ , die nicht gleich dem Grenzwinkel der Totalreflexion oder gleich 0 oder  $\pi$  sind.<sup>1)</sup>

Die Vorzeichenänderung von  $\mathfrak{S}_x$  mit dem Zeichenwechsel von  $\cos \varphi_0$  kommt dadurch hinein, daß derselbe Zeichenwechsel für  $Y$  und  $B$  gilt, für  $X$  und  $A$  dagegen nicht, während die Energieströmungen doch senkrecht auf der elektrischen und magnetischen Kraft stehen müssen. Vergegenwärtigen wir uns demgemäß, daß die Energieströmungen als etwas Sekundäres aus den Grundlagen der Elektrodynamik fließen, so verliert die Strömung durch die Einfallsebene ein wenig das Merkwürdige, das ihr auf den ersten Blick anhaftet.<sup>2)</sup> Die Isotropie der Medien wirkt offenbar vorzüglich auf die primäre elektrische und magnetische Kraft, für die ja auch in erster Linie Grenzbedingungen gelten. Das ist eine der Konsequenzen, zu denen uns die Annahme des Poyntingschen Vektors zwingt. Es mag übrigens noch hervorgehoben werden, daß die Symmetrie ja auch darin zum Ausdruck gelangt, daß alle Größen, auch die Komponenten von  $\mathfrak{S}$ , von  $z$  unabhängig bleiben.

Man wird nun auch für diese — auch im Mittel — von Null verschiedene Energieströmung  $\mathfrak{S}_x$  ebenso einen experimentellen Nachweis wünschen, wie man es stets für  $\mathfrak{S}_x$  getan hat. Hierüber gedenke ich demnächst zu berichten.

### § 3. Das Energieprinzip an der Grenzfläche zweier durchsichtiger Medien.

Die Formel für die Änderung der elektromagnetischen Energie

$$\frac{\partial \Sigma_{e\mu}}{\partial t} = \int \mathfrak{S}_{ni} d\sigma$$

gibt uns die Möglichkeit, Schlüsse über das Verhalten des Vektors  $\mathfrak{S}$  an der Grenzfläche unserer beiden Medien zu

1) W. Voigt, Ann. d. Phys. 67. p. 185. 1899.

2) Hr. S. Boguslawsky findet in seiner Abhandlung „Das Feld des Poyntingschen Vektors bei der Interferenz von zwei ebenen Lichtwellen in einem absorbierenden Medium“ (Phys. Zeitschr. 12. p. 393. 1912) auch eine solche Komponente von  $\mathfrak{S}$  senkrecht zur Einfallsebene — und zwar ist es sein  $\mathfrak{S}_{xr}$  — ohne aber weiter auf das Sonderbare ihres Auftretens aufmerksam zu machen. Er setzt einfallendes, elliptisch polarisiertes Licht voraus.

ziehen. Betrachten wir dazu zunächst ein beliebiges System, das quellenfrei ist, so ist für dieses System in jedem Augenblick:

$$\int \mathfrak{S}_{n_i} d\sigma = 0.$$

Diese Gleichung drückt gleichzeitig aus, daß für die Strömung  $\mathfrak{S}$  das Energieprinzip im ganzen System erfüllt ist. Lassen wir das System zu einer zweiseitig begrenzten Fläche zusammenschrumpfen, so werden wir erhalten:

$$\int \mathfrak{S}_{n_i} d\sigma_1 = - \int \mathfrak{S}_{n_i} d\sigma_2.$$

Dabei ist  $\mathfrak{S}_{n_i}$  im ersten Integral dem  $\mathfrak{S}_{n_i}$  im zweiten direkt entgegengesetzt gerichtet.

Wollen wir nun überhaupt  $\mathfrak{S}$  als den einzigen im System vorhandenen Strömungsvektor ansprechen, so werden wir diese letzte Formel als auch für das Integralelement verbindlich ansehen und schreiben:

$$(\mathfrak{S}_{n_i})_1 = - (\mathfrak{S}_{n_i})_2.$$

Wir betrachten weiterhin die unendlich ausgedehnte Grenzfläche der beiden Medien I und II als das eben behandelte System, und können dementsprechend für jeden Punkt derselben zu jeder Zeit verlangen:

$$\overline{\mathfrak{S}_{n_i}} = - \overline{\mathfrak{S}_{n_{ii}}}$$

oder:

$$\overline{\mathfrak{S}_{y_i}} = \overline{\mathfrak{S}_{y_{ii}}}.$$

D. i. aber:

$$\overline{\mathfrak{S}_{e_y}} + \overline{\mathfrak{S}_{r_y}} = \overline{\mathfrak{S}_{g_y}}.$$

Das Bestehen dieser Gleichung gewährleistet uns also gegebenenfalls, daß die Strömung  $\mathfrak{S}$  das Energieprinzip an der Grenzfläche erfüllt, und zwar die gesamte Strömung  $\mathfrak{S}$ . Nur solche Energieströmungen, die nicht in  $\mathfrak{S}$  enthalten sind (also das ganze in unserem Falle unendliche System quellenfrei durchsetzen), werden nicht von ihr erfaßt.

Diese Beziehung ist nun nicht nur für die gewöhnliche Reflexion und Brechung, sondern auch für die Totalreflexion erfüllt, auch bei beliebiger geradliniger Polarisation des einfallenden Lichtes. Allerdings besteht noch ein Unterschied



zwischen der gewöhnlichen Reflexion und der Totalreflexion. Bei ersterer gilt:

$$\mathfrak{S}_e \leq 0 \quad \mathfrak{S}_r \geq 0 \quad \mathfrak{S}_g \leq 0,$$

wobei  $\mathfrak{S}_e$ ,  $\mathfrak{S}_r$  und  $\mathfrak{S}_g$  überdies lediglich in gleicher Phase Null werden. Aus unserer Beziehung für die  $Y$ -Komponenten ergibt sich daher:

$$|\overline{\mathfrak{S}_e}| \geq |\overline{\mathfrak{S}_r}|; |\overline{\mathfrak{S}_e}| \geq |\overline{\mathfrak{S}_g}|.$$

Die Gleichheitszeichen gelten nur, wenn alle drei Komponenten Null sind.

Bei der Totalreflexion beliebig linear polarisierten Lichts hingegen tritt an Stelle dieser beiden Reihen von Formeln:

$$\mathfrak{S}_e \leq 0 \quad \mathfrak{S}_r > 0 \quad \mathfrak{S}_g \geq 0$$

$$|\mathfrak{S}_e| \geq |\mathfrak{S}_r|$$

während sich nicht mehr ohne weiteres eine Ungleichung zwischen  $\mathfrak{S}_e$  und  $\mathfrak{S}_g$  mit den für  $\mathfrak{S}_e$ ,  $\mathfrak{S}_r$  und  $\mathfrak{S}_g$  geltenden in Einklang bringen läßt. Ist im Spezialfall  $F = 0$  bzw.  $G = 0$ , so ist die für  $\mathfrak{S}_g$  geschriebene Ungleichung durch ein Gleichheitszeichen zu vervollständigen.

Diese Überlegungen bringen nun den Vorteil, daß wir nicht nur an  $\mathfrak{S}_g$ , sondern nach der letzten Ungleichung auch schon allein an  $\mathfrak{S}_e$  und  $\mathfrak{S}_r$  sehen können, daß sich bei der Totalreflexion neben dem Einströmen der Energie ins II. Medium auch ein Hervorquellen aus demselben vorfindet. An  $\mathfrak{S}_g$  kann man das z. B. durch die beiden Integralbeziehungen aufzeigen:

$$\int_{t+\frac{\tau}{4}}^{t+\frac{\tau}{2}} \mathfrak{S}_g dt = - \int_{t+\frac{\tau}{4}}^{t+\frac{\tau}{2}} \mathfrak{S}_g dt; \quad \int_a^{a+\frac{\pi}{2k_1 \cos \varphi_0}} \mathfrak{S}_g dx = - \int_a^{a+\frac{\pi}{k_1 \cos \varphi_0}} \mathfrak{S}_g dx.$$

## § 4. Die instantanen Lichtstrahlen im dünneren Medium.

Wir konstruieren jetzt ähnlich wie in den beiden Spezialfällen  $F = 0$  und  $G = 0$  die Lichtstrahlen im II. Medium zunächst zur Zeit  $t = 0^1$  da sie gemäß

$$\cos \left( \mathfrak{S}_g X \right) = \frac{\mathfrak{S}_x}{\mathfrak{S}}; \quad \cos \left( \mathfrak{S}_g Y \right) = \frac{\mathfrak{S}_y}{\mathfrak{S}}; \quad \cos \left( \mathfrak{S}_g Z \right) = \frac{\mathfrak{S}_z}{\mathfrak{S}}$$

nur von  $x$  und  $t$  abhängen. — Die Abhängigkeit von  $y$  fällt heraus. Diese letzte Vereinfachung läßt uns die gesuchten Kurven am bequemsten als Schnittkurven der beiden Flächen-scharen  $y(x)$  und  $z(x)$  darstellen entsprechend:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathfrak{S}_y}{\mathfrak{S}_x} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\mathfrak{S}_z}{\mathfrak{S}_x}.$$

Die Integrale dieser beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen liefern ja gleichzeitig die Projektionen der Lichtstrahlen auf die  $xy$ - bzw.  $xz$ -Ebene. Den Einfluß von  $t$  werden wir erst nachträglich studieren. Das wichtigste Resultat liefert die erste der beiden Differentialgleichungen, die sich durch einige Umrechnungen auf die Form bringen läßt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{k_1^2 \cos^2 \varphi_0 - k_{II}^2}}{k_1 \cos \varphi_0} \cdot \frac{a \sin 2[x k_1 \cos \varphi_0 + d_g]}{b + a \cos 2[x k_1 \cos \varphi_0 + d_g]}$$

wo  $d_g$  eine schon auf p. 470 genannte Phasenverzögerung in  $\mathfrak{S}_x$  und  $\mathfrak{S}_y$  ist und wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$a^2 = \frac{F^4}{(k_1^2 - k_{II}^2)^2} + \frac{G^4 k_{II}^4}{(k_{II}^4 \sin^2 \varphi_0 + k_1^4 \cos^2 \varphi_0 - k_1^2 k_{II}^2)^2} + \frac{2 F^2 G^2 k_{II}^2 \cos 2(\delta_g - \delta_g)}{(k_1^2 - k_{II}^2)(k_{II}^4 \sin^2 \varphi_0 + k_1^4 \cos^2 \varphi_0 - k_1^2 k_{II}^2)}$$

$$b = \frac{F^2}{k_1^2 - k_{II}^2} + \frac{G^2 k_{II}^2}{k_{II}^4 \sin^2 \varphi_0 + k_1^4 \cos^2 \varphi_0 - k_1^2 k_{II}^2}.$$

Das Integral lautet:

$$y = - \frac{\sqrt{k_1^2 \cos^2 \varphi_0 - k_{II}^2}}{2 k_1^2 \cos^2 \varphi_0} \ln \{ b + a \cos 2[x k_1 \cos \varphi_0 + d_g] \} + \text{const.}$$

Wir entnehmen dieser Gleichung die wichtige Tatsache, daß nicht alle Flächen der Schar die  $xz$ -Ebene  $y=0$ , d. h. die Grenz-

1) A. Eichenwald, i. e. Hr. Eichenwald konstruiert in den Spezialfällen die elektrischen Kraftlinien und gewinnt die Kurven des Poynting'schen Vektors als orthogonale Trajektorien.

fläche durchsetzen, da nämlich der Absolutwert des Logarithmus wegen  $b > 0$  und  $b > a$  nicht mehr größer als  $\ln(b-a)$ , also speziell auch nicht unendlich groß werden kann. Es ist ja  $\delta_g$  stets von  $\vartheta_g$  im Bereiche der Totalreflexion verschieden. In den Spezialfällen  $F = 0$  wie  $G = 0$  trifft dagegen wegen  $a = b$  jeder durch eine bestimmte Integrationskonstante hervorgehobene Zylinder die Grundfläche  $y = 0$ .

Da nun die instantanen Lichtstrahlen ganz auf den eben konstruierten Zylindern liegen müssen, aus denen sie durch die Zylinder  $dz/dx = \mathfrak{S}_z/\mathfrak{S}_x$  herausgeschnitten werden, so können sie in unserem allgemeinen Falle der Polarisisation nicht mehr alle von der Grenzfläche ausgehen und zu ihr zurücklaufen. Sie kommen also teilweise von Unendlich her und bewegen sich in Kurven entlang der  $xz$ -Ebene nach Unendlich hin.

Wir konstruieren uns noch ein schematisches Bild der Projektionen unserer Zylinder  $y(x)$  in bezug auf die  $xy$ -Ebene. Da  $y(x)$  in  $x$  die Periode  $\pi/k_1 \cos \varphi_0$  besitzt, brauchen wir nur einen Streifen senkrecht zur  $X$ -Achse von der Breite dieser Periode zu wählen. Um Anschluß an die Figuren für die Spezialfälle  $F = 0$  und  $G = 0$  zu erhalten<sup>1)</sup>, greifen wir ein solches Stück der  $X$ -Achse heraus, an dessen Enden  $\mathfrak{S}_y = 0$  und  $\mathfrak{S}_x$  ein Minimum ist. Diese Punkte liegen aber zwischen den Stellen, an denen  $\mathfrak{S}_x$  für  $F = 0$  bzw.  $G = 0$  zu Null wird, und zwar um so mehr nach den ersten bzw. zweiten wenig von den ersten verschiedenen Punkten verschoben, je größer  $F/G$  bzw.  $G/F$  ist. Die Fig. 2 läßt dann erkennen, wie das Ein- und Ausströmen nur bis zu einer gewissen Tiefe ins II. Medium hineinreicht, unterhalb deren wir nur ein Auf- und Niederschwanken der Strömung feststellen können.

Für die Projektion der Lichtstrahlen auf die  $xz$ -Ebene erhalten wir zur Zeit  $t = 0$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\mathfrak{S}_z}{\mathfrak{S}_x} = - \frac{2k_{II} \sin \varphi_0 (k_I^2 \cos^2 \varphi_0 - k_{II}^2)}{k_{II}^4 \sin^2 \varphi_0 + k_I^4 \cos^2 \varphi_0 - h_I^2 k_{II}^2} \cdot \frac{F \cdot G}{b + a \cos^2 [x k_I \cos \varphi_0 + d_g]}.$$

1) A. Eichenwald, l. c.

worin  $a$ ,  $b$  und  $d_g$  dieselben Abkürzungen wie p. 474 bedeuten. Damit ergibt sich:

$$z = -2 \frac{k_{II} \sin \varphi_0}{k_I \cos \varphi_0} \cdot \frac{k_I^2 \cos^2 \varphi_0 - k_{II}^2}{k_{II}^4 \sin^2 \varphi_0 + k_I^4 \cos \varphi_0 - k_I^2 k_{II}^2} \\ \cdot \frac{F \cdot G}{\sqrt{b^2 - a^2}} \cdot \arctg \left\{ \sqrt{\frac{b-a}{b+a}} \operatorname{tg} (x k_I \cos \varphi_0 + d_g) \right\} + \text{const.}$$

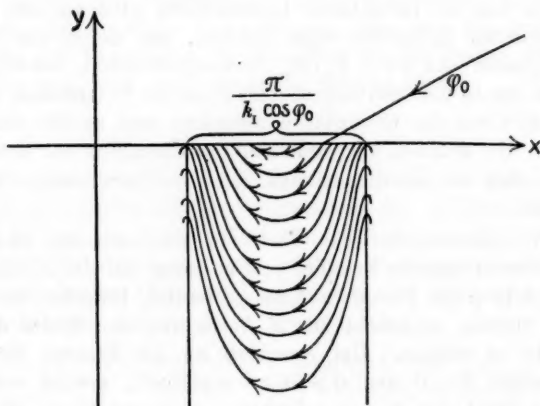


Fig. 2.

Diese Projektionen, die in  $x$  auch die Periode  $\pi/k_I \cos \varphi_0$  haben, lassen sich ihrem Verlaufe nach völlig übersehen, wenn wir die Kurven  $z = -\arctg (f \cdot \operatorname{tg} x)$  zeichnen, worin  $f$  eine Konstante bedeutet. Diese Kurven kann man wiederum leicht aus  $z = \arctg x$  entnehmen. Die Kurven  $z = -\arctg (f \operatorname{tg} x)$  gehen aber für  $f=1$  in die unter  $45^\circ$  ansteigenden Geraden  $z = x + h\pi$ , für  $f=0$  in Parallelen zur  $X$ -Achse  $z = h\pi$  über. Da  $a$  und  $b$  beides positive Größen sind, und  $b > a$  ist, nimmt die Konstante  $f$  in unseren Projektionen einen Wert zwischen Null und Eins an. Für solche Werte von  $f$  werden sich daher die Kurven  $z = -\arctg (f \operatorname{tg} x)$  um die Geraden  $z = x + h\pi$  herumwinden, sich im Mittel mehr diesen oder den Parallelen zur  $X$ -Achse nähernd, je nachdem  $\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}$  näher an 1 oder 0 liegt.

Aus diesen in Fig. 3 schematisch gezeichneten Kurven erhalten wir die Projektionen der Lichtstrahlen in der  $xz$ -Ebene, wenn wir die ganze Figur um  $x = -(d_g/k_1 \cos \varphi_0)$  verschieben und außerdem die Perioden auf der  $X$ -Achse gleich  $\pi/k_1 \cos \varphi_0$  an Stelle von  $\pi$  wählen. Endlich ist auch die Breite der Streifen hinsichtlich  $z$  entsprechend dem konstanten Faktor vor dem  $\arctg$  zu verändern. Die Integrationskonstante läßt dann

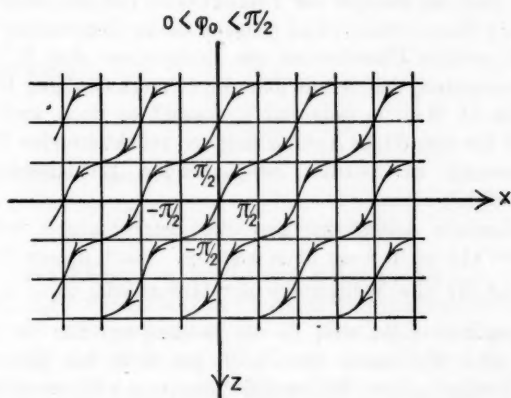


Fig. 3.

selbstverständlich noch aus den isolierten Kurven der Fig. 3 eine unendliche Schar entstehen. Diese gehen sowohl für  $F = 0$  wie für  $G = 0$  in Parallele zur  $X$ -Achse über, da alsdann  $b = a$  wird.

#### § 5. Betrachtungen über die Herkunft der Energie im dünneren Medium.

Da die von der Grenzfläche ausgehenden Lichtstrahlen zur Zeit  $t = 0$  nur bis zu einer gewissen Tiefe ins II. Medium hineinreichen, was damit natürlich zu einer jeden Zeit für die instantanen Lichtstrahlen gilt, erhebt sich von neuem auf ganz anderem Boden die Frage nach der Herkunft der Energie des dünneren Mediums. Es muß doch jetzt den Eindruck gewinnen, als ob ein gewisser Teil der Energie nicht nur im Mittel, sondern dauernd von Unendlich nach Unendlich im II. Medium hinflösse, dabei stets die Einfallsebene in wechselnder Richtung

durchsetzend. Der Gedanke drängt sich geradezu auf, daß dieser Teil der Energie durch eine Art Beugung im Unendlichen der Trennungsfläche ins II. Medium übergeströmt sei. Unser ganzes Problem ist doch vor allem nach zwei Seiten hin ein Grenzfall, sowohl hinsichtlich der unendlichen Grenzfläche wie der unendlichen Entfernung der Lichtquelle. Das Fallenlassen jeder einzelnen dieser beiden singulären Annahmen würde bewirken, daß der Bereich der Totalreflexion auf eine Begrenzung in der  $xy$ -Ebene träfe. Und jenseits dieser Begrenzung könnte man ein solches Überströmen der Energie aus dem I. Medium ins II. vermuten, das gerade den obigen merkwürdigen Energiestrom im II. Medium hervorriefe, kommt es doch auch sonst vor, daß die unendliche Ausdehnung von reflektierenden Flächen Veranlassung zu seltsam erscheinenden Lichtenergieverteilungen gibt.<sup>1)</sup>

Jedenfalls helfen uns hier die Betrachtungen von Hrn. Eichenwald nicht mehr ohne weiteres. Auch unsere Energiegleichung für alle Weltpunkte der Grenzfläche  $\bar{\mathcal{E}}_y + \bar{\mathcal{E}}_y = \bar{\mathcal{E}}_y$  nützt uns hier nicht viel, da sie ja eben nur für die Grenzfläche gilt. Wir haben aber noch gar nicht den Einfluß der Verschiebung unseres Bildes der instantanen Lichtstrahlen im Laufe der Zeit besprochen. Wir wollen ihn jetzt kurz betrachten.

Bei dieser Verschiebung bleibt die Richtung der Energieströmungen, definiert durch  $\mathcal{S}$  als Funktion von  $x$  und  $t$ , auf Ebenen

$$\frac{2\pi t}{\tau} + x k_1 \cos q_0 = \text{const.}$$

unverändert dieselbe. Es fragt sich nun vor allem, wie sich die Energie selbst auf den Strömungskurven bewegt. Um darüber etwas aussagen zu können, müssen wir bedenken, daß die Lichtstrahlen im dünneren Medium nicht mehr senkrecht auf der Wellenebene, der  $yz$ -Ebene stehen. Daher müssen wir wie bei Kristallen zwischen Normalengeschwindigkeit und Strahlgeschwindigkeit unterscheiden. Es handelt sich aber überdies noch um die Strahlgeschwindigkeit in *inhomogenen*

1) Vgl. z. B. A. Wiegrefe, Ann. d. Phys. 42. p. 1253. 1913.



Wellen. Die Normalengeschwindigkeit  $-\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1 \cos \varphi_0}}$  ist nach Richtung und Größe bekannt, dazu die Richtung der Strahlgeschwindigkeit in jedem Punkte.

Wir wollen nun zunächst nur kurz diskutieren, was sich ergeben würde, falls wir die Größe der Strahlgeschwindigkeit  $V$  wie bei Kristallen durch die Normalgeschwindigkeit  $N$  definierten:

$$V \cos(VN) = N.$$

Es wäre dann

$$V = -\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1 \cos \varphi_0}} \cdot \frac{\mathfrak{E}_g}{\mathfrak{E}_x}.$$

Mithin würde  $V$  konstant sein für

$$\frac{2\pi\tau}{\tau} + x k_1 \cos \varphi_0 = \text{const.},$$

also auf den Ebenen senkrecht zur  $X$ -Achse, die sich mit der Geschwindigkeit  $N$  entlang der  $X$ -Achse verschieben, für die also die Richtung  $\mathfrak{E}$  und damit von  $V$  konstant ist. Da nun  $V$  in Richtung der  $X$ -Achse die Komponente  $N$  besitzt, würde auf die Grenzfläche zu beliebiger Zeit auftreffende Energie mit der Strahlgeschwindigkeit  $V$  geradlinig ins Unendliche des II. Mediums weiterströmen, sofern sie überhaupt ins II. Medium eindringt. Sie würde sich parallel zur Grenzfläche bewegen an allen den Stellen, wo die Richtung der instantanen Lichtstrahlen parallel zur Grenzfläche verläuft. Überall sonst fände in geradliniger Bahn Ausströmung aus dem II. Medium, selbst aus dem Unendlichen her, statt.

Der so dargestellte Vorgang ist jedoch offensichtlich nicht mit der Inkonzanz der Wellenamplitude vereinbar. Er zeigt aber wenigstens, wie auch in diejenigen Teile des II. Mediums hinein Energie durch die Grenzfläche hindurchdringen könnte, in denen die Richtung der instantanen Strömungskurven entlang der Grenzfläche verläuft, ohne diese je zu durchsetzen. Es zeigt aber weiterhin, daß man den Ausdruck Lichtstrahlen auf die zur Zeit  $t = 0$  konstruierten Kurven des Poynting'schen Vektors nur schlecht anwenden kann, da diese jedenfalls nicht die eigentlichen Strömungskurven der Energie sind.

Schließlich zeigt unsere Überlegung noch, daß die Verschiebung der Kurven auch für die Spezialfälle  $F = 0$  und  $G = 0$  direktes Interesse bietet. Daß alle instantanen Kurven in diesen Fällen von der Grenzfläche aus und wieder zu ihr zurückgehen, gibt diesen Fällen nach der obigen Betrachtung offenbar gar nicht viel prinzipiell vor unserem allgemeinen Fall voraus.

Die genauere Untersuchung der wirklichen Lichtstrahlen im II. Medium sei auf eine weitere Mitteilung verschoben. Wir schließen diese Abhandlung mit der Bemerkung, daß wir bei von der Zeit abhängigen Richtungen des Poyntingschen Vektors nicht ohne weiteres Schlüsse aus dessen instantanen Richtungen ziehen dürfen, auch eine Konsequenz für den Poyntingschen Vektor.

Bückeburg, den 16. Mai 1914.

(Eingegangen 30. Mai 1914.)

---

## 2. *Fallende Bezugssysteme vom Standpunkte des Relativitätsprinzips;* *von Friedrich Kottler.*

In einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> waren als mögliche beschleunigungsrelative Bewegungen diejenigen gezeigt worden, die als Weltlinien die Bahnen einer „Bewegung“ des Minkowskischen  $S_4$  besitzen. Insbesondere gehört zu diesen die Hyperbelbewegung, welche die relativistische Verallgemeinerung des Galileischen freien Falles ist.

Auf Grund der dort aufgestellten verallgemeinerten Lorentztransformation wird nun in der vorliegenden Arbeit ein in Hyperbelbewegung fallendes Bezugssystem untersucht. In Übereinstimmung mit einer bekannten Einsteinschen Theorie wird die Krümmung der Lichtstrahlen — sie sind Kreise — nachgewiesen, und es werden zwei mögliche Auffassungen des Beobachters, welcher in Unkenntnis seiner beschleunigten Bewegung zu denken ist, eine „scheinbare“ und eine „richtige“, diskutiert. Nach der ersteren nimmt der Beobachter ungekrümmte Lichtstrahlen an, was im allgemeinen statthaft ist, da die Abweichung von der geraden Linie der Beschleunigung geteilt durch das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit proportional, also verschwindend klein sein wird. Er sieht dann exakt die Fallvorgänge, wie wir sie auf der Erde haben, insbesondere erscheint als Wurfbahn die Galileische Parabel. Nach der zweiten ist er zur Kenntnis der Krümmung der Lichtstrahlen gelangt, und erkennt, daß in seiner Welt andere Naturgesetze als die gewöhnlich angenommenen herrschen. Es wird angenommen, daß er dann das Fermatsche Prinzip der Optik und das Galileische Trägheitsgesetz aufgibt. Die richtige Gestalt der Wurfbahn ist eine fast parabelartige Ellipse.

1) F. Kottler, Relativitätsprinzip und beschleunigte Bewegung. *Ann. d. Phys.* **44**, p. 701. 1914. (Zitiert als I.)

Eine dritte Auffassung ergibt sich, wenn angenommen wird, daß er die Lichtstrahlen als gerade Linien seinen Messungen zugrunde legt. Dann läßt sich das Fermatsche Prinzip und das Galileische Trägheitsgesetz aufrecht erhalten, die so konstruierte Raumgeometrie ist aber keine euklidische mehr, sondern eine hyperbolische.

Zum Schlusse wird auf die Ähnlichkeit mit einer von Byk aufgestellten Theorie der Materie und der Quanten hingewiesen und es ergeben sich hierbei Ausblicke auf eine vollständige Theorie der Materie, die Gravitation, Quantenmechanik und Kohäsion der Elektrizität umfassen würde.

#### Bezeichnungen.

$\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$  richtige Koordinaten (normale Zuordnung), „gleichzeitige“ Position in I.

$X, Y, Z$  scheinbare Koordinaten (minimale Zuordnung, d. h. durch Lichtlinien), „effektive“ Position in I.

#### Ausführliche Inhaltsübersicht.

§ 1. Richtige und scheinbare Koordinaten im beschleunigten Bezugssystem.

1. Definition der Koordinaten mit Hilfe der Äquidistanz. — 2. Zwei Koordinatenarten: richtige (normale Zuordnung der Weltlinien) und scheinbare (Zuordnung mittels Lichtlinien). — 3. Der Unterschied der beiden ist der Beschleunigung proportional und eine Folge der Krümmung der Lichtstrahlen.

§ 2. Berechnung der Koordinaten mittels der verallgemeinerten Lorentztransformation.

1. Die Lorentztransformation. — 2. Berechnung der richtigen Koordinaten. — 3. Beschränkung des Bezugskörpers: die Grenzebene. — 4. Berechnung der scheinbaren Koordinaten. — 5. Quadratische Transformation, die die scheinbaren mit den richtigen Koordinaten verbindet.

§ 3. Lichtstrahlen und kräftefreie Massenpunkte im beschleunigten Bezugssystem.

1. Transformation einer zeitartigen Geraden bzw. Lichtlinie auf richtige Koordinaten: Darstellung als Funktion des Bogens. — 2. Darstellung als Funktion der Eigenzeit des Beobachters. 3. Scheinbare Koordinaten.

§ 4. Diskussion der Resultate des § 3.

1. Lichtstrahlen im beschleunigten System sind Kreise, welche die Grenzebene senkrecht schneiden; sie erscheinen in scheinbaren Koordinaten als Gerade. — 2. Einzeichnung der scheinbaren und richtigen

Lage eines Punktes des Bezugskörpers. — 3. Kräftefreie Massenpunkte bewegen sich längs Ellipsen, welche die Grenzebene senkrecht schneiden. — 4. In scheinbaren Koordinaten stellen sich diese als Galileische Parabeln dar. Die scheinbare Beschleunigung ist konstant gleich der negativen Eigenbeschleunigung des Beobachters.

### § 5. Bogenelement und Trägheitsgesetz.

1. Angabe des Bogenelements bedeutet Angabe der Ausbreitungsgesetze des Lichts. Die kovariante Form der physikalischen Ausdrücke als Folge davon, daß sie erst mit Hilfe der Ausbreitungsgesetze gemessen werden können. — 2. Bei Veränderlichkeit dieser Gesetze von Weltpunkt zu Weltpunkt bedeutet Kontra-(Ko)varianz: Transformation kogredient (kontragredient) wie die Differentiale der Koordinaten (oder deren Produkte). — 3. Übertragung der Minkowskischen Mechanik auf ein euklidisches, transformiertes Bogenelement. Die geodätischen Linien des Bogens geben das Trägheitsgesetz. — 4. Bewegungsgleichungen für den nicht kräftefreien Massenpunkt: die innere Energie als Konstante des Punktes. — 5. Anwendung auf das fallende Bezugssystem: die Fallbewegung wird in richtigen Koordinaten als beschleunigungsfrei angesehen zum Unterschied von den scheinbaren Beschleunigungen in scheinbaren Koordinaten. — 6. Lichtlinien als Minimalgeodäten.

### § 6. Messungen und die hyperbolische Geometrie.

1. Ermittlung der richtigen Entfernung als kürzester Entfernung mittels Meßbandes. — 2. Die Lichtzeitentfernung, gemessen längs der Lichtstrahlen, hat Richtung aber nicht Größe mit der scheinbaren Entfernung gemeinsam. — 3. Wenn der Beobachter die Lichtstrahlen als gerade Linien seines Raumes und konstante Lichtgeschwindigkeit annimmt, so ist dies widerspruchsfrei für einen hyperbolisch gekrümmten Raum. — 4. Die konforme Abbildung des hyperbolischen Raumes auf den euklidischen Halbraum bei Grenzkugelkoordinaten.

### § 7. Die Fallbewegung bei hyperbolischer Raumaufassung.

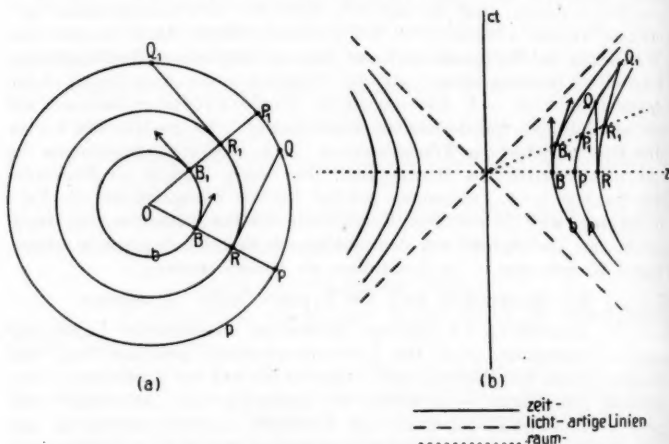
1. Sie ist „krummlinig“, also nicht kräftefrei. — 2. Ermittlung dieser Kräfte. — 3. Anwendung der Skalartheorie der Gravitation in der zweiten Nordströmschen Form: das Potential ist das der scheinbaren Beschleunigung. — 4. Das Potential, obwohl nicht das hyperbolische Coulombsche, ähnelt diesem. — 5. Die Byksche Theorie der Materie: Bei Berücksichtigung der Gravitation gelangt man zu einer (schwachen) hyperbolischen Krümmung auch des Außenraumes. — 6. Ableitung des Bykschen Atommodells aus der Einsteinschen Lichtkrümmung.

### § 1. Richtige und scheinbare Koordination im beschleunigten Bezugssystem.

1. Es sei zunächst an die Äquidistanz der Weltlinienschar erinnert, welche es ermöglicht, einer Weltlinie, wenn

nur einmal eine Zuordnung zwischen den Punkten von  $p$  und  $b$ , der Weltlinie des Beobachters, getroffen ist, für alle Zeiten fixe „Koordinaten“ zuzuweisen, worin sich eben die Ruhe relativ zum Beobachter auf  $b$  ausdrückt.

Fig. 1a bringt das Analogon der gewöhnlichen euklidischen Ebene, wobei als *Eichkurve*<sup>1)</sup> der Maßbestimmung der Einheitskreis um  $O$  verwendet wird: die Bahnkurven der Drehung



Normale und schiefe Äquidistanz bei raumartiger Drehung (a) und bei zeitartiger Drehung (b).

Fig. 1.

sind hier bekanntlich konzentrische Kreise um das Drehungszentrum  $O$  und es ist einleuchtend, daß jede Figur durch die Drehung sukzessive in lauter kongruente Figuren übergeht. Insbesondere ist also  $BP = B_1 P_1$ , ebenso  $BQ = B_1 Q_1$ , das sich aus zwei Komponenten  $BR = B_1 R_1$ ,  $\parallel$  der Hauptnormale in  $B$  bzw.  $B_1$  und  $RQ = R_1 Q_1$ ,  $\parallel$  der Tangente zusammensetzen läßt. Wir werden vom Standpunkte eines längs des Kreises  $b$  bewegten „Beobachters“ als „Koordinate“ des

1) Die Eichkurve (diese Bezeichnung stammt aus Minkowskis Geometrie der Zahlen) gibt die Einheitsstrecken einer beliebigen Richtung durch die Länge ihres zu dieser Richtung parallelen Radius, vgl. L. Heffter u. C. Koehler, Lehrb. d. analyt. Geometrie. p. 367. Leipzig 1905.



Kreises  $p$  bei normaler Zuordnung  $BP = B_1 P_1 = \text{const.}$  ansprechen, bei der Zuordnung  $Q \rightarrow B$  als „Koordinaten“  $BR = B_1 R_1 = \text{const.}$  (längs der Hauptnormale gemessen) und  $RQ = R_1 Q_1 = \text{const.}$  (längs der Tangente gemessen).

Fig. 1b bringt dasselbe für eine euklidische Ebene, in welcher als *Eichsystem die gleichseitige Hyperbel*

$$z^2 - (ct)^2 = 1 \quad (\text{raumartige Richtungen}),$$

bzw. ihre konjugierte

$$z^2 - (ct)^2 = -1 \quad (\text{zeitartige Richtungen})$$

auftritt. Die Drehung hat hier konzentrische gleichseitige Hyperbeln um das Drehzentrum  $O$  zu Bahnkurven.<sup>1)</sup> Die analoge Überlegung wie vorhin ergibt für die Hyperbel  $p$  vom Standpunkte eines längs der Hyperbel  $b$  bewegten Beobachters betrachtet die „Koordinate“

$$\beta' = BP = B_1 P_1 = \text{const.},$$

wobei „normale“ Zuordnung  $P \rightarrow B$  getroffen ist, bzw. die „Koordinaten“

$$Z' = BR = B_1 R_1 = \text{const.},$$

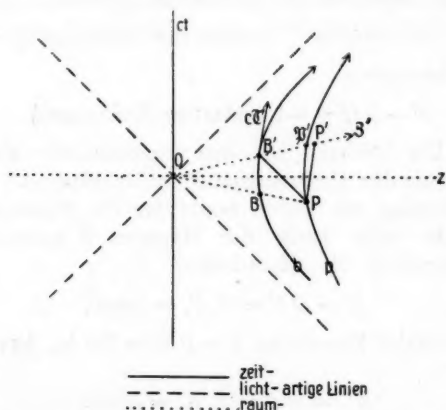
$$cT' = RQ = R_1 Q_1 = \text{const.},$$

wobei die Zuordnung  $Q \rightarrow B$  getroffen ist.

2. Nun mögen zwei Zuordnungen der Weltlinienschar hervorgehoben werden; die erste sei diejenige, bei welcher zugehörige Punkte durch *raumartige* Gerade verbunden sind, die auf allen Weltlinien *senkrecht* stehen. (In Fig. 2 sind dies also die Radien durch  $O$ , also gehören  $P$  zu  $B$  oder  $\beta'$  zu  $B'$ ). Die zweite sei diejenige, bei welcher zugehörige Punkte durch *Lichtlinien* verbunden sind. (In Fig. 2 gehört in diesem Sinne  $P$  zu  $B'$ ). Da durch  $B$  ein Kegel (in der Ebene der Fig. 2 ein Paar) von Lichtlinien geht, ist zur eindeutigen Festlegung der Zuordnung die Angabe der Hälfte dieses Kegels erforderlich. Man hat hier offenbar den *Vorkegel* zu wählen, welcher die Lichtlinien enthält, auf denen  $B$  von zeitlich *vor* ihm gelegenen Punkten Licht *empfängt*.

1) Zu diesen gehört auch das konjugierte System von Hyperbeln, welches aber keine Weltlinien liefert.

Die erste Zuordnung nennen wir die *richtige*, die zweite die *scheinbare*. Zur Rechtfertigung dieser Benennung bemerken wir: die Weltlinienschar repräsentiert die Bewegung eines Körpers (Fig. 2: eines einfach ausgedehnten (Raumzeitfaden Minkowskis)). Dieser Körper behält im Eigensystem



Richtige ( $\mathfrak{P}$ ) und scheinbare ( $P'$ ) Koordinaten der Weltlinie  $p$  auf dem Bezugskörper.

Fig. 2.

(Fig. 2: Tangente, Hauptnormale = Radius durch  $O$ ) konstante Gestalt: z. B. ist die Entfernung  $BP = B'\mathfrak{P}' = \text{const.}$  Ein Beobachter, der längs  $b$  bewegt wird, wird also, wenn ihm die gerade Richtung von seinem Standpunkt  $B$  gegen  $P$  bekannt ist<sup>1)</sup>, mit Hilfe eines Meßbandes, wann immer er diese Messung ausführt, die Entfernung gleich  $BP$  im Eigenmaßstab *tatsächlich* finden. Darum heißt  $BP$  die *richtige* Entfernung,  $P \rightarrow B$  oder  $\mathfrak{P} \rightarrow B'$  die *richtige* Zuordnung.

Aber da der Beobachter nur mit Hilfe des Lichts sieht, kann er  $P$  nicht in der *richtigen* Entfernung *sehen*.

In der Tat, sieht er  $P$  erst, wenn er selbst in  $B'$  angelangt ist, wobei zwischen der Lage  $B, P \dots$  des Bezugskörpers

1) Vgl. aber § 6, Punkt 2.

und derjenigen  $B'$ ,  $\mathfrak{P}' \dots$  die Latenzzeit liegt, die das Licht von  $P$  nach  $B'$  braucht. Da nun aber infolge der beschleunigten Bewegung des Beobachters dessen Eigensystem sich gedreht hat, liefert die Projektion  $P'$  von  $P$  auf dieses nicht mehr die *richtige* Entfernung  $BP$ , sondern die *scheinbare*  $B'P' > BP$ ; (die *richtige* Entfernung ist natürlich  $B'\mathfrak{P}' = BP$ , wo  $\mathfrak{P}'$  die Lage ist, die vermöge der *richtigen* Zuordnung zu  $B'$  gehört, also der Schnittpunkt des Radius  $OB'$  mit der Weltlinie  $p$ ).<sup>1)</sup> (Bei einer *gleichförmigen Translation*, wo die Weltlinienschar aus parallelen Geraden besteht, verschiebt sich natürlich das Eigensystem zu sich selbst parallel, so daß jeder Lichtpunkt in der „*richtigen*“ Entfernung *erscheint*.)

3. Es möge vorweg bemerkt werden<sup>2)</sup>, daß nur die *richtigen* ( $\mathfrak{P}'$ ) Koordinaten der Messung zugänglich sind, wobei sich die *scheinbaren* ( $P'$ ) eben als Sinnestäuschung herausstellen. Was die Zeiten anbelangt, so gehört zu  $P'$  die „*scheinbare*“ Latenzzeit  $T'$ , wo  $cT' = PP' = B'P'$ , während für die „*richtige*“ Latenzzeit  $c\mathfrak{T}'$  die Bogenlänge  $B\mathfrak{B}'$  ist (beide auf Eigenzeit bezogen). Nur die letztere ist wieder der Messung zugänglich<sup>3)</sup> und daher hat die erstere überhaupt eine Existenz als höchstens eine indirekte, durch die „*scheinbare*“ Entfernung des Lichtpunktes gegebene.

Da die Krümmung der Weltlinie  $b$ , die durch den reziproken „Radius“  $OB$  gegeben ist, mit wachsender Entfernung vom Zentrum abnimmt (im Unendlichen tritt gar keine Gerade statt der Hyperbel auf), ist der Unterschied der *scheinbaren* gegen die *richtigen* Koordinaten dann um so kleiner. Anders ausgedrückt: *je geringer die Beschleunigung, desto weniger unterscheiden sich scheinbare und richtige Koordinaten*. Wir werden sehen (§ 2, Punkt 5), daß für diesen Unterschied die durch das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit dividierte Eigenbeschleunigung maßgebend ist.

1) Im Fall des mehr als eindimensionalen Bezugskörpers (Fig. 2 stellt ja nur einen solchen dar) kommt außer der Entfernungs- auch eine Richtungsänderung der *scheinbaren* gegen die *richtige* Lage hinzu.

2) § 6, Punkt 1.

§ 2. Berechnung der Koordinaten mittels der verallgemeinerten Lorentztransformation.

1. Wir erinnern an die Resultate (I § 6), wonach sich die Eigenkoordinaten als die Werte  $\Gamma^{(2)}$ ,  $\Gamma^{(3)}$ ,  $\Gamma^{(4)}$  und  $\Gamma^{(1)}$  (letzteres als imaginäre Zeitkoordinate) in der verallgemeinerten Lorentztransformation

$$X = x + \Gamma^{(1)} c_1 + \Gamma^{(2)} c_2 + \Gamma^{(3)} c_3 + \Gamma^{(4)} c_4$$

ergeben. Dabei benötigen wir die Werte der Richtungskosinusse des begleitenden Vierkants. Tab. 1, Type IIIb, Kolonne 13 bis 16 l. c. gibt uns, wenn jetzt  $x^{(1)} = x$ ,  $x^{(2)} = y$ ,  $x^{(3)} = z$ ,  $x^{(4)} = ict$  genommen wird und die Weltlinie  $b$  des Beobachters in der Gestalt (l. c. Type IIIb Kolonne 2)

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = b \cosh u, \quad ct = b \sinh u$$

gegeben ist, die Werte:

$$\text{Tangente:} \quad c_1^{(1)} = 0, \quad c_1^{(2)} = 0, \quad c_1^{(3)} = \frac{1}{b} \operatorname{sh} u, \quad c_1^{(4)} = \operatorname{ch} u$$

$$\text{Hauptnormale:} \quad c_2^{(1)} = 0, \quad c_2^{(2)} = 0, \quad c_2^{(3)} = -\operatorname{ch} u, \quad c_2^{(4)} = -\operatorname{sh} u$$

$$\text{„Binormale“:} \quad c_3^{(1)} = 1, \quad c_3^{(2)} = 0, \quad c_3^{(3)} = 0, \quad c_3^{(4)} = 0$$

$$\text{„Trinormale“:} \quad c_4^{(1)} = 0, \quad c_4^{(2)} = 1, \quad c_4^{(3)} = 0, \quad c_4^{(4)} = 0$$

Die Bezeichnungen „Binormale“ und „Trinormale“ sind selbstredend willkürlich. Wir haben also:

$$X = x_0 + \Gamma^{(3)}, \quad Y = y_0 + \Gamma^{(4)}, \quad Z = (b - \Gamma^{(2)}) \operatorname{ch} u + \left(\frac{1}{b} \Gamma^{(1)}\right) \operatorname{sh} u, \\ cT = (b - \Gamma^{(2)}) \operatorname{sh} u + \left(\frac{1}{b} \Gamma^{(1)}\right) \operatorname{ch} u.$$

Diese Formeln wenden wir an: erstens zur Ermittlung der richtigen Koordinaten  $\mathfrak{X}'$ ,  $\mathfrak{Y}'$ ,  $\mathfrak{Z}'$ , zweitens zur Ermittlung der scheinbaren Koordinaten  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$ .

2. Richtige Koordinaten  $\mathfrak{X}'$ ,  $\mathfrak{Y}'$ ,  $\mathfrak{Z}'$ : Die entsprechende Zuordnung war (§ 1 Punkt 2) die „normale“. Zur Lage  $X, Y, Z, cT$  gehört also ein ganz bestimmter Wert  $u$  des Parameters der Weltlinie  $b$  des Beobachters, so daß  $X, Y, Z, cT$  im Normalraum von  $u$  zu liegen kommt; dazu ist offenbar notwendig, daß:

$$(1) \quad \sum_{h=1}^4 (X^{(h)} - x^{(h)}(u)) \cdot c_1^{(h)}(u) = i(Z \cdot \operatorname{ch} u - cT \cdot \operatorname{sh} u) = 0.$$

Ist diese Bedingung für  $u$  erfüllt, dann kann man schreiben:

$$X = x + \Delta^{(2)} c_2 + \Delta^{(3)} c_3 + \Delta^{(4)} c_4,$$

also, wenn <sup>1)</sup>

$\beta' = -\Delta^{(2)}, \quad \mathfrak{X}' = \Delta^{(3)}, \quad \mathfrak{Y}' = \Delta^{(4)}, \quad c\mathfrak{X}' - c\tau = \frac{1}{i}\Delta^{(1)} = 0$   
gesetzt werden <sup>2)</sup>:

$$(2) \quad \begin{cases} X = x_0 + \mathfrak{X}' \\ Y = y_0 + \mathfrak{Y}' \\ Z = (b + \beta') \operatorname{ch} u \\ cT = (b + \beta') \operatorname{sh} u. \end{cases}$$

Damit diese Gleichungen nach  $\mathfrak{X}' \mathfrak{Y}' \beta'$  auflösbar seien, ist das Verschwinden der Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & X \\ 0 & 1 & 0 & Y \\ 0 & 0 & \operatorname{ch} u & Z \\ 0 & 0 & \operatorname{sh} u & cT \end{vmatrix} = 0$$

erforderlich, was auf die Bedingung (1) für  $u$  führt, die also auch hinreichend ist.

3. In (2) ist die Beschränkung

$$Z^2 - c^2 T^2 > 0, \quad Z > 0$$

zu machen, da der Raumzeitfaden des Bezugskörpers keine Weltpunkte  $Z^2 - c^2 T^2 < 0$  enthalten kann (diese müßten sich ja mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen) und ebensowenig Weltpunkte  $Z^2 - c^2 T^2 > 0$ , aber  $Z \leq 0$ . Er müßte sonst die Asymptoten durch  $O$  aus Stetigkeitsgründen mit enthalten, was Lichtgeschwindigkeit für einen seiner materiellen Punkte bedeuten würde und daher ausgeschlossen ist. Solche Weltpunkte kann auch der Beobachter *gar nicht sehen*; diejenigen

1) Wegen des Vorzeichens von  $\beta'$  vergleiche I, Anm. 1 auf p. 746 zu Anhang 4.

2) Hieraus findet man die von A. Einstein, Ann. d. Phys. 38. p. 359 (1912) gegebenen Formeln (4), wenn man mit Einstein sich auf Größen zweiter Ordnung in  $u$  beschränkt. Die von Einstein angenommene *Fallbewegung* ist im Grunde eine *Hyperbelbewegung*; siehe seine einleitenden Worte I. c. p. 356: „diese Beschleunigung sei eine gleichförmige im Bornschen Sinne“.

bei welchen  $Z^2 - c^2 T^2 < 0$ , liegen zu keiner Eigenzeit in seinem Raume. Die Weltpunkte aber, für welche  $Z^2 - c^2 T^2 > 0$  aber  $Z \leq 0$ , senden ihm ihr Licht erst nach unendlich langer Zeit zu, wie man z. B. aus Fig. 2 erkennt: Die Lichtlinien, die aus dem anderen raumartigen Winkelraum der Asymptoten kommen, der die zweiten Zweige der Hyperbeln enthält, dringen in den ersten Winkelraum offenbar erst im Unendlichen fern, da sie sämtlich den diesen Winkelraum einschließenden Asymptoten parallel und außerhalb verlaufen. Ähnliches gilt auch für zwei nicht koplanare Hyperbeln, die verschiedenen Winkelräumen angehören.<sup>1)</sup>

4. *Scheinbare Koordinaten*  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$ . Die entsprechende Zuordnung war die „minimale“. Zur Lage  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $cT$  gehört also ein ganz bestimmter Wert des Parameters  $u > u$ , derart, daß  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $cT$  auf den Vorkegel des Punktes  $x(u)$ ,  $y(u)$ ,  $z(u)$ ,  $ct(u)$  zu liegen kommt. Dazu muß offenbar sein

$$(3) \quad \sum_{h=1}^4 (X^{(h)} - x^{(h)}(u))^2 = 0.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, dann kann man schreiben:

$$X = x \Gamma^{(1)} c_1 + \Gamma^{(2)} c_2 + \Gamma^{(3)} c_3 + \Gamma^{(4)} c_4 \quad \text{mit} \quad \sum_{h=1}^4 (\Gamma^{(h)})^2 = 0,$$

also, wenn

$$\begin{aligned} Z' &= -\Gamma^{(3)}, \quad X' = \Gamma^{(3)}, \quad Y' = \Gamma^{(4)}, \quad cT' - c\tau = \frac{1}{i} \Gamma^{(1)} \\ &= -\sqrt{(X')^2 + (Y')^2 + (Z')^2} \end{aligned}$$

gesetzt sind:

$$(4) \quad \begin{cases} X = x_0 + X' \\ Y = y_0 + Y' \\ Z = (b + Z') \operatorname{ch} u - \sqrt{(X')^2 + (Y')^2 + (Z')^2} \cdot \operatorname{sh} u \\ cT = (b + Z') \operatorname{sh} u - \sqrt{(X')^2 + (Y')^2 + (Z')^2} \cdot \operatorname{ch} u. \end{cases}$$

Damit diese in  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$  quadratischen Gleichungen verträglich seien, ist wieder nur die Bedingung (3) für  $u$  erforderlich.

1) Wir nennen darum die Ebene  $b + Z' = 0$  auf dem Bezugskörper *Grenzebene*, vgl. § 6, Punkt 4. — Aus der obigen Bedingung deduziert M. Born, Ann. d. Phys. 30. p. 1 1909 eine maximale mit dem Radius einer Korpuskel verträgliche Beschleunigung.



5. *Beziehung zwischen den zu einem und demselben Wertesystem  $X, Y, Z, cT$  gehörigen Werten  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$  und  $X', Y', Z'$ .* Da die Auflösung von (4) nicht so einfach, wie die von (2) ist, suchen wir eine Beziehung zwischen den richtigen und scheinbaren Koordinaten, die uns gestattet wird, bloß die Transformation (2) durchzuführen und von dieser aus auch die Werte  $X', Y', Z'$  zu erreichen.

Hierzu haben wir:

$$\begin{aligned} X &= x_0 + \mathfrak{X}' &= x_0 + X' \\ Y &= y_0 + \mathfrak{Y}' &= y_0 + Y' \\ Z &= (b + \mathfrak{Z}') \operatorname{ch} u = (b + Z') \operatorname{ch} u - \sqrt{(X')^2 + (Y')^2 + (Z')^2} \operatorname{sh} u \\ cT &= (b + \mathfrak{Z}') \operatorname{sh} u = (b + Z') \operatorname{sh} u - \sqrt{(X')^2 + (Y')^2 + (Z')^2} \operatorname{ch} u \end{aligned}$$

also

$$X' = \mathfrak{X}', \quad Y' = \mathfrak{Y}'$$

und aus der bei unserer Drehung geltenden Invarianz der zweidimensionalen Entfernung von  $O^1$ ):

$$Z^2 - c^2 T^2 = (b + \mathfrak{Z}')^2 = (b + Z')^2 - ((X')^2 + (Y')^2 + (Z')^2),$$

so daß die gesuchten Relationen lauten:

$$(5) \quad \begin{cases} X' = \mathfrak{X}' \\ Y' = \mathfrak{Y}' \\ 2bZ' = \mathfrak{X}'^2 + \mathfrak{Y}'^2 + \mathfrak{Z}'^2 + 2b\mathfrak{Z}'. \end{cases}$$

Dies ist mathematisch gesprochen, eine quadratische Transformation des  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ -Raumes, bei welcher der Nullpunkt (Standpunkt des Beobachters) invariant bleibt. Über ihre merkwürdigen Eigenschaften werden uns die folgenden Paragraphen belehren. Es möge hier nur darauf hingewiesen werden, daß die Schlußfolgerung des vorigen Paragraphen zu recht besteht: der Unterschied der scheinbaren gegen die richtigen Koordinaten ist ausgedrückt durch

$$Z' - \mathfrak{Z}' = \frac{1}{2b} (\mathfrak{X}'^2 + \mathfrak{Y}'^2 + \mathfrak{Z}'^2) = \frac{g}{2c^2} (\mathfrak{X}'^2 + \mathfrak{Y}'^2 + \mathfrak{Z}'^2),$$

wo  $g$  die Eigenbeschleunigung des Beobachters ist. Er wird also um so kleiner, je kleiner  $g$  gegen  $c^2$  ist.

1) bzw. dem Punkte  $X, Y, 0, 0$ .

§ 3. Lichtstrahlen und kräftefreie Massenpunkte im beschleunigten Bezugssystem.

1. Wir fassen eine zeitartige Gerade und stellen ihre Punkte als Funktionen der Zeit dar:

$$(6) \quad X = X_0 + q_x T, \quad Y = Y_0 + q_y T, \quad Z = Z_0 + q_z T, \quad cT = cT,$$

wobei

$$q^2 = q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 \leq c^2.$$

Gilt das Gleichheitszeichen, so haben wir es mit der Weltlinie eines Lichtstrahls, sonst mit der Weltlinie eines kräftefreien Massenpunktes zu tun, da ja das Galileische Trägheitsgesetz auch in der Minkowskischen Mechanik gilt.

Wir transformieren nach (2); es kommt:

$$\begin{aligned} X &= X_0 + q_x T = x_0 + \mathfrak{X}', \\ Y &= Y_0 + q_y T = y_0 + \mathfrak{Y}', \\ Z &= Z_0 + q_z T = (b + \mathfrak{Z}) \operatorname{ch} u, \\ cT &= (b + \mathfrak{Z}) \operatorname{sh} u, \end{aligned}$$

wobei der Wert  $u$  nach (1) aus

$$Z \operatorname{sh} u - cT \operatorname{ch} u = Z_0 \operatorname{sh} u + (q_z \operatorname{sh} u - c \operatorname{ch} u) T = 0$$

zu ermitteln ist. Dies ist also eine punktweise Zuordnung der Geraden zur Hyperbel des Beobachters. Insbesondere gehört zu  $T = 0$  der Wert  $u = 0$ , wie dies ja selbstverständlich, da zur Zeit  $t = 0$  der Normalraum des Beobachters mit dem Raum  $ct = 0$  zusammenfällt.

Wir erhalten die  $\mathfrak{X}' \mathfrak{Y}' \mathfrak{Z}'$  mithin als Funktionen von  $T$ :

$$(7a) \quad \begin{cases} \mathfrak{X}' = X_0 - x_0 + q_x T, \\ \mathfrak{Y}' = Y_0 - y_0 + q_y T, \\ b + \mathfrak{Z}' = \sqrt{(Z_0 + q_z T)^2 - c^2 T^2} \end{cases}$$

und die Zeit  $\mathfrak{T}'$ , wegen  $c\mathfrak{T}' = c\tau$  und I, Tab. 1, Kolonne 7:

$$c^2 d\tau^2 = b^2 du^2$$

aus (1) zu:

$$c\mathfrak{T}' = b \operatorname{arctgh} \frac{cT}{Z_0 + q_z T}$$

oder

$$(7b) \quad T = \frac{Z_0 \operatorname{sh} \frac{c\mathfrak{T}'}{b}}{c \cdot \operatorname{ch} \frac{c\mathfrak{T}'}{b} - q_z \cdot \operatorname{sh} \frac{c\mathfrak{T}'}{b}}.$$

In der Darstellung (7a) tritt der Parameter  $T$  auf, der bei (6) eine *invariante Bedeutung* hat.

Denn auch für die Transformation (2) gilt *Invarianz des Bogenelements*, also ist auch

$$d\sigma^2 = c^2 dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2 = (c^2 - q^2) dT^2$$

eine Invariante, so daß in (7a) bloß statt  $T$ :

$$T = \frac{\sigma}{\sqrt{c^2 - q^2}}$$

einzusetzen ist, um die Invarianz hervortreten zu lassen.

2. Wir stellen noch die  $\mathfrak{X}' \mathfrak{Y}' \mathfrak{Z}'$  als Funktionen der Eigenzeit des Beobachters dar; hierzu setzen wir

$$c = \sqrt{c^2 - q_z^2} \cdot \operatorname{ch} \frac{c \mathfrak{X}_1'}{b}, \quad q_z = \sqrt{c^2 - q_z^2} \operatorname{sh} \frac{c \mathfrak{X}_1'}{b},$$

so daß kommt:

$$(7c) \quad T = \frac{Z_0 \operatorname{sh} \frac{c \mathfrak{X}'}{b}}{\sqrt{c^2 - q_z^2} \cdot \operatorname{ch} \frac{c(\mathfrak{X}' - \mathfrak{X}_1')}{b}} = \frac{Z_0 c}{c^2 - q_z^2} \operatorname{tgh} \frac{c(\mathfrak{X}' - \mathfrak{X}_1')}{b} + \frac{Z_0 q_z}{c^2 - q_z^2}$$

und

$$(8) \quad \begin{cases} \mathfrak{X}' = \mathfrak{X}_1' + (b + \mathfrak{Z}_1') \frac{q_z}{\sqrt{c^2 - q_z^2}} \operatorname{tgh} \frac{c(\mathfrak{X}' - \mathfrak{X}_1')}{b}, \\ \mathfrak{Y}' = \mathfrak{Y}_1' + (b + \mathfrak{Z}_1') \frac{q_y}{\sqrt{c^2 - q_z^2}} \operatorname{tgh} \frac{c(\mathfrak{X}' - \mathfrak{X}_1')}{b}, \\ \mathfrak{Z}' = (b + \mathfrak{Z}_1') \cdot \frac{1}{\cosh \frac{c(\mathfrak{X}' - \mathfrak{X}_1')}{b}}, \end{cases}$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_1' &= X_0 - x_0 + Z_0 \frac{q_z q_s}{c^2 - q_s^2}, & b + \mathfrak{Z}_1' &= \frac{Z_0 c}{\sqrt{c^2 - q_s^2}} \\ \mathfrak{Y}_1' &= Y_0 - y_0 + Z_0 \frac{q_y q_s}{c^2 - q_s^2}, \end{aligned}$$

gesetzt ist.

Die Bedeutung des Zeitpunktes  $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X}_1'$ , also wegen (7c)

$$T_1 = \frac{Z_0 q_s}{c^2 - q_s^2}, \quad Z_1 = \frac{Z_0 c^2}{c^2 - q_s^2}$$

erhellt aus folgendem: die Koordinate  $\mathcal{Z}'$  erreicht für  $\mathcal{X}' = \mathcal{X}'_1$  ihr Maximum; d. h., da die Richtung  $\mathcal{Z}'$  die Vertikale auf dem Bezugskörper darstellt, die Bahn verkehrt sich von *ansteigender* in *fallende* Richtung.

3. In den *scheinbaren* Koordinaten erhalten wir vermöge (5) aus (7a):

$$(9) \quad \begin{cases} X' = X'_0 + q_x T, \\ Y' = Y'_0 + q_y T, \\ 2bZ' = -(c^2 - q^2) T^2 + 2(X'_0 q_x + Y'_0 q_y + Z'_0 q_z) T \\ \quad \quad \quad + X'^2_0 + Y'^2_0 + Z'^2_0 - b^2, \end{cases}$$

wo  $X'_0 = X_0 - x_0$ ,  $Y'_0 = Y_0 - y_0$  gesetzt ist.

#### § 4. Diskussion der Resultate des § 3.

1. *Lichtstrahlen im beschleunigten System*:  $q^2 = c^2$ . Aus (7a) oder (8) folgt, daß die Lichtstrahlen auf dem Bezugskörper *Kreise*<sup>1)</sup> sind, die sämtlich ihre Mittelpunkte in der Grenzebene

$$b + \mathcal{Z}' = 0$$

haben und zu dieser Grenzebene senkrecht stehen, die also, kurz ausgedrückt, die Grenzebene senkrecht schneiden. Insbesondere gehören auch die geraden Normalen dieser Ebene hierzu; sie werden für

$$q_x = q_y = 0, \quad q_z = c$$

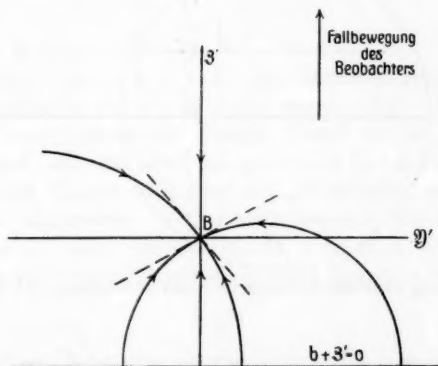
erhalten. Also sind die parallel der Fallrichtung verlaufenden Lichtstrahlen *geradlinig*, alle anderen erleiden infolge der Fallbewegung des beschleunigten Systems eine *Krümmung*.

In den *scheinbaren* Koordinaten stellen sich die Lichtstrahlen (9) als *Gerade* dar. Dies war zu erwarten. Denn die scheinbaren Koordinaten waren ja dadurch definiert, daß der Beobachter alle Punkte in diejenige Richtung verlegt, in welcher er sie *sieht*. Dann stellen sich die Lichtstrahlen selbstverständlich als Gerade dar.

In der Fig. 3 sind die Lichtstrahlen, welche *B* empfängt,

1) Radius:  $b + \mathcal{Z}'_1$ , Mittelpunkt:  $\mathcal{X}'_1, \mathcal{Y}'_1, b + \mathcal{Z}' = 0$ .

in ihrer richtigen und scheinbaren Gestalt eingezeichnet. Die von  $B$  ausgehenden Strahlen sind natürlich mit den nach  $B$  einlaufenden identisch, da auf unserem beschleunigten Bezugskörper die Lichtgeschwindigkeit von der Richtung unabhängig ist (anders wäre es auf einem *rotierenden* Körper). Die Figur beschränkt sich auf die  $\mathcal{Y}\mathcal{Z}$ -Ebene; die Lichtstrahlen in einer



Richtige und scheinbare Gestalt der Lichtstrahlen im fallenden Bezugssystem.

Fig. 3.

beliebigen Ebene durch die  $\mathcal{Z}'$ -Achse, die durch  $B$  gehen, stellen sich offenbar als ein *Kreisbüschel* dar, dessen beide reelle Grundpunkte  $B$  und der zu  $B$  bezügliche der Grenzebene  $b + \mathcal{Z}' = 0$  symmetrische Punkt sind, dessen Chordale die  $\mathcal{Z}'$ -Achse ist, wobei diese Elemente den  $\infty^1$ -Kreisbüscheln in den  $\infty^1$ -Ebenen durch die  $\mathcal{Z}'$ -Achse gemeinsam sind.

2. Nunmehr können wir auch die scheinbaren Lagen  $P'$ , in denen der Beobachter die Punkte  $\mathcal{P}'$  seines Bezugskörpers sieht, einzeichnen. Wir haben bloß an Stelle des richtigen den scheinbaren Lichtweg zu nehmen und können dann einfach, da vermöge (5) gilt:

$$\mathcal{X}' = \mathcal{X}, \quad \mathcal{Y}' = \mathcal{Y}, \quad 2b\mathcal{Z}' = \mathcal{X}'^2 + \mathcal{Y}'^2 + \mathcal{Z}'^2 + 2b\mathcal{Z}',$$

dieselben  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ -Koordinaten, die dem Punkte  $\mathcal{P}'$  zukommen,



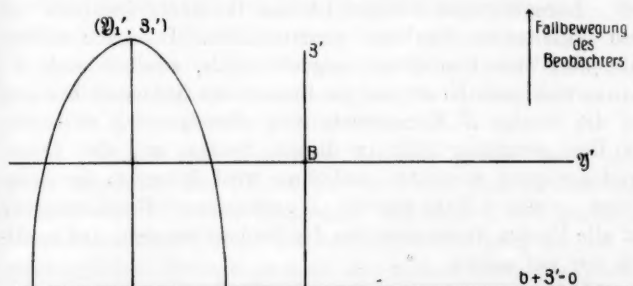
Vertikalen und dem Mittelpunkt in der Grenzebene; sie schneiden also, kurz ausgedrückt, die Grenzebene senkrecht. Das Achsenverhältnis ist:

$$\beta/\alpha = \sqrt{\frac{q_x^2 + q_y^2}{c^2 - q_x^2}},$$

die Exzentrizität:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{c^2 - q^2}{c^2 - q_x^2}}.$$

Man folgert: Ist  $q_x = q_y = 0$ , die Horizontalgeschwindigkeit Null, so erleidet der Punkt einen reinen „Fall“ in der Vertikalen ( $\beta = 0$ ) (geradlinige Bahn). Sonst ist die Bahn stets eine Ellipse, nur im Grenzfall  $q = c$  ( $\varepsilon = 0$ ) ein Kreis (Lichtstrahl). Die Ellipse wird also die „Wurf“bahn des Punktes, sie ist im allgemeinen, weil  $q$  klein gegen  $c$ , nahezu eine *Parabel* ( $\varepsilon = 1$ ). Am ehesten macht sich noch der Ellipsencharakter bei reiner Horizontalgeschwindigkeit ( $q_x = 0$ ) geltend.



Eine „Wurfbahn“ eines kräftefreien Punktes im beschleunigten Bezugssystem (Ellipse).

Fig. 5.

Man findet überdies in Fig. 5 die Aussage des vorigen Paragraphen, daß  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1'$  der Zeitpunkt der Umkehr sei, bestätigt.

4. Die Formel (9) gibt die scheinbare Gestalt der Fall- bzw. Wurfbahn. Erstere ist wieder eine vertikale Gerade, letztere eine Galileische *Parabel*. Die scheinbare Gestalt der *Wurf- und Fallbahn* ist also hier dieselbe wie in der klassischen

*Mechanik.* Dies hat nichts Überraschendes an sich. Durch Differentiation von (9) nach  $T$  findet man nämlich:

$$\frac{d^2 X'}{dT^2} = 0, \quad \frac{d^2 Y'}{dT^2} = 0, \quad \frac{d^2 Z'}{dT^2} = -\frac{c^2}{b^2}(1 - q^2/c^2),$$

wofür man auch, da der Bogen der Weltlinie

$$\sigma = c T \sqrt{1 - q^2/c^2}$$

schreiben kann:

$$(10) \quad \frac{d^2 X'}{d\sigma^2} = 0, \quad \frac{d^2 Y'}{d\sigma^2} = 0, \quad \frac{d^2 Z'}{d\sigma^2} = -1/b.$$

Das ist nichts anderes als der Ausdruck für die Tatsache, daß die „scheinbare“ Beschleunigung gleich der negativen Eigenbeschleunigung ist (vgl. I, Anhang 4). Dies gilt selbstverständlich nur für die „scheinbaren“ Koordinaten. Diese kennzeichnen ja eine effektive Position, die auf ein gewöhnliches Lorentzsystem bezogen ist, das für den Augenblick mit dem begleitenden Vierkant zusammenfällt. In einem solchen ruht aber der Beobachter augenblicklich, weshalb sich die Minkowskische Kraft (auf die Einheit der Ruhmasse bezogen) auf die einzige  $Z'$ -Komponente vom Betrage  $c^2/b$  reduziert; die Beschleunigung fällt in diesem System mit der Eigenbeschleunigung zusammen und diese wird daher, da der Beobachter an eigene Ruhe glaubt, als „scheinbare“ Beschleunigung auf alle Punkte übertragen, die der Beobachter *sieht*, und natürlich *nur* auf solche.

Da denn die scheinbare Beschleunigung konstant ist, geben die Gleichungen (10) die Galileische Parabel und nicht etwa eine Kettenlinie, welche ja nach I, § 2, Punkt 9 an Stelle der Galileischen Parabel in der Relativitätstheorie tritt. Aber dies hat dort seinen Grund in dem Unterschied der longitudinalen und transversalen Masse, der ja hier gar nicht ins Spiel kommen kann, da es sich nur um „scheinbar“ beschleunigte, in „Wirklichkeit“ kräftefreie Bewegungen handelt.

Wie sich in den „richtigen“ Koordinaten die Beschleunigungen darstellen, kann erst im folgenden Paragraphen auf Grund des Bogenelements diskutiert werden.



## § 5. Bogenelement und Trägheitsgesetz.

1. Die Angabe des Ausdrucks für das Bogenelement der Welt bedeutet die Angabe der Gesetze der Lichtfortpflanzung, indem die Lichtgeschwindigkeit als Funktion des Ortes, der Zeit und der Richtung hieraus sofort zu berechnen ist. Umgekehrt genügt die Kenntnis dieser Gesetze und gewisser Randwerte der Koeffizienten, um den Ausdruck des Bogenelements aufzustellen. Nach der Relativitätstheorie erfolgt ferner die Ausbreitung der Kraftwirkungen nach denselben Gesetzen.

Da nun diese Ausbreitungsgesetze etwas absolut Gegebenes sind, folgt, daß sie bei jeglicher Betrachtungsweise, die ja erst durch sie möglich wird, erhalten bleiben. Dies ist die natürlichste Auffassung beispielsweise der Lorentztransformation. Die scheinbaren Verkürzungen usw. beim Übergang zum bewegten System erfolgen nicht *damit*, sondern *weil* die Lichtgeschwindigkeit konstant bleibt. In der Tat können ja die Messungen beispielsweise der Gleichzeitigkeit usw. erst mit Hilfe des Lichtes gemacht werden. Aus diesem Grunde nehmen überhaupt alle mathematischen Ausdrücke die gewisse invariante, kovariante, kontravariante Form an, nicht *damit* an ihnen keine Veränderung der Ausbreitungsgesetze konstatiert werde, sondern *weil* sie erst mit Hilfe dieser Gesetze gemessen werden.

2. Nimmt man nun eine Veränderlichkeit dieser Ausbreitungsgesetze von Ort zu Ort oder von Zeit zu Zeit an<sup>1)</sup>, so muß die *Form* der Ausdrücke diejenige der Differentialinvariantentheorie<sup>2)</sup> sein. In der Tat, würde man anstatt des ursprünglichen Raumzeitsystems eine andere Betrachtungsweise der Welt zugrundelegen, was also mathematisch auf eine raumzeitliche Transformation hinauskommt, so muß man die Ausbreitungsgesetze wieder auffinden. Das heißt aber mathematisch: Die Transformation erhält den Bogen und die gesuchte Form der mathematischen Ausdrücke darf hingegen keinen Widerspruch

1) Vgl. A. Einstein u. M. Großmann, Entwurf usw., Leipzig, Teubner, 1913.

2) G. Ricci u. T. Levi-Civita, Math. Ann. 54. p. 125. 1901. — J. E. Wright, Cambridge Tracts in Mathematics usw. Nr. 9. Cambridge 1908. — Einstein-Großmann, l. c., II. Teil. — F. Kottler, Wien. Ber. IIa. 121. Oktober 1912.

enthalten. Insbesondere müssen gewisse Invarianten in beiderlei Auffassung dieselben sein. Analog wie man in der gewöhnlichen Vektoranalysis hieraus auf die Vektoreigenschaft (Transformation wie die Koordinaten oder wie deren Produkte) schließt, findet man jetzt die raumzeitliche Vektoreigenschaft, wenn man postuliert, daß sich die Komponenten wie die *Differentiale* der Koordinaten oder deren Produkte transformieren (Kontravarianten), wobei auch die reziproke Transformation hinzuzuziehen ist (Kovarianten). In der Tat ist ja für eine Transformation der  $x$  in die  $\bar{x}$ :

$$d\bar{x}^{(i)} = \sum_{k=1}^4 \frac{\partial \bar{x}^{(i)}}{\partial x^{(k)}} dx^{(k)} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

eine lineare Transformation der Differentiale, wo allerdings die Koeffizienten nicht konstant sind.

3. Die Physik eines allgemeinen Bogenelementes zu entwickeln, hat man ein bequemes Hilfsmittel. Man kann — und dies genügt für unsere Zwecke — ein Bogenelement

$$dS^2 = \sum_{i,k=1}^4 g_{ik}(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \bar{x}^{(3)}, \bar{x}^{(4)}) d\bar{x}^{(i)} d\bar{x}^{(k)} \\ = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$$

nehmen, welches auf die euklidisch Minkowskische Form transformierbar ist. Dann kann man die  $\bar{x}$  bloß als rechnerische Größen ansehen, hat also zunächst keineswegs eine andere als die Minkowskische Welt anzunehmen. Dann ist klar, daß man die Minkowskische Mechanik bloß in die generalisierten Koordinaten  $\bar{x}$  umzusetzen hat.

Das Trägheitsgesetz lautet bei Minkowski: Kräftefreie Massenpunkte beschreiben *gerade* Weltlinien. Die Umsetzung ergibt: Kräftefreie Massenpunkte beschreiben kürzeste<sup>1)</sup>, d. h. *geodätische* Weltlinien, da ja die geodätische Eigenschaft gegen Transformationen, die das Bogenelement in sich überführen, invariant ist. Hat man daher bei Minkowski die Bewegungsgleichungen

$$(11) \quad \frac{d^2 x^{(h)}}{d\sigma^2} = 0, \quad h = 1, 2, 3, 4,$$

1) Im reellen Bogenmaß ( $\sigma$ ): längste.

so lauten sie jetzt<sup>1)</sup>

$$(11a) \quad \frac{d}{d\sigma} \left( \sum_{k=1}^4 \bar{g}_{hk} \frac{d\bar{x}^{(k)}}{d\sigma} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^4 \bar{g}_{kl} \frac{d\bar{x}^{(k)}}{d\sigma} \frac{d\bar{x}^{(l)}}{d\sigma} = 0, \quad h=1,2,3,4,$$

wobei

$$d\sigma^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2 = - \sum_{k,l=1}^4 \bar{g}_{kl} d\bar{x}^{(k)} d\bar{x}^{(l)}.$$

Dem sub 2 Auseinandergesetzten entsprechend kann hier sofort die kovariante Form von (11a) nachgewiesen werden, die ebenso wie (11) auf einen einfachen Zusammenhang des Vektors der Eigenbeschleunigung und des Betrages der Eigenbeschleunigung mit der verallgemeinerten Hauptnormale und der ersten Krümmung der Weltlinie führt.

Es sind nämlich die ersten Differentialquotienten  $dx^{(h)}/d\sigma$  kontravariant von erster Ordnung in den  $x$  (d. h. Komponenten eines Vektors: der Tangente). Führt man nämlich neue Koordinaten  $\bar{x}$  an Stelle der  $x$  ein, wobei

$$d\sigma^2 = - \sum_{i,k=1}^4 g_{ik} dx^{(i)} dx^{(k)} = - \sum_{i,k=1}^4 \bar{g}_{ik} d\bar{x}^{(i)} d\bar{x}^{(k)},$$

so sieht man sofort, daß

$$\frac{d\bar{x}^{(h)}}{d\sigma} = \sum_{i=1}^4 \frac{dx^{(i)}}{d\sigma} \frac{\partial \bar{x}^{(h)}}{\partial x^{(i)}}.$$

Wir schreiben, dies auszudrücken:

$$\frac{d\bar{x}^{(h)}}{d\sigma} = x_{/\sigma}^{(h)}.$$

Für die zweiten Differentialquotienten  $d^2 \bar{x}^{(h)}/d\sigma^2$  gilt dies nicht mehr; sie bilden *keinen* Vektor. Wohl aber kann man (es ist dies eine *Erweiterung* der von Ricci u. Levi-Civita gegebenen Definition), einen solchen, wie folgt definieren:

$$x_{/\sigma\sigma}^{(h)} = \frac{d^2 x^{(h)}}{d\sigma^2} + \sum_{k,l=1}^4 \left\{ \begin{matrix} k l \\ h \end{matrix} \right\} \frac{dx^{(k)}}{d\sigma} \frac{dx^{(l)}}{d\sigma}.$$

Hierin ist

$$\left\{ \begin{matrix} k l \\ h \end{matrix} \right\} = \sum_{p=1}^4 g^{(h)p} \left[ \begin{matrix} k l \\ p \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^4 g^{(h)p} \left( \frac{\partial g_{kp}}{\partial x^{(l)}} + \frac{\partial g_{pl}}{\partial x^{(k)}} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^{(p)}} \right).$$

1) L. Bianchi, Differentialgeometrie, erste Auflage. p. 569. Gleichungen (A). Leipzig 1899.

und  $g^{(hp)} = g^{(ph)}$  die zu  $g_{hp}$  reziproke Form, so daß

$$\sum_{p=1}^4 g^{(hp)} g_{pq} = 1 \text{ wenn } h = q, \\ = 0 \text{ wenn } h \neq q.$$

Dieser Vektor hat den Betrag der „ersten Krümmung“

$$\frac{1}{R_1} = \sqrt{\sum_{k,l=1}^4 g_{kl} x_{/\sigma\sigma}^{(k)} x_{/\sigma\sigma}^{(l)}}$$

und die Richtung der „Hauptnormale“ (L. Bianchi l. c. p. 604), steht also in innigstem Zusammenhang mit der verallgemeinerten Eigenbeschleunigung. Ferner kann gezeigt werden:

$$\sum_{k=1}^4 g_{hk} x_{/\sigma\sigma}^{(k)} = \frac{d}{d\sigma} \left( \sum_{k=1}^4 g_{hk} \frac{dx^{(k)}}{d\sigma} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^4 g_{kl} \frac{dx^{(k)}}{d\sigma} \frac{dx^{(l)}}{d\sigma},$$

womit die Form (11a) als die kovariante eines Vektors nachgewiesen ist.

Es möge noch bemerkt werden, daß in den I. Anhang 1 gegebenen Landsbergischen Formeln für das begleitende Vierkant die  $dx/dt$ ,  $d^2x/dt^2$ ,  $d^3x/dt^3$  usw. bloß durch die  $x_{/t}^{(h)}$ ,  $x_{/tt}^{(h)}$ ,  $x_{/ttt}^{(h)}$  usw. ersetzt werden müssen, um die Frenetschen Formeln für ein allgemeines Bogenelement zu liefern. Hierbei ist  $t$  ein bel. Parameter, der nicht der Bogen zu sein braucht.

Von dem Standpunkte der Transformation auf generalisierte Koordinaten ist sofort klar, daß *kräftefreie Massenpunkte auch in den neuen Koordinaten als „unbeschleunigt“ zu gelten haben.*

Da nun die Integrale der Bewegungsgleichungen (11a) für  $\bar{x}^{(1)}$ ,  $\bar{x}^{(2)}$ ,  $\bar{x}^{(3)}$  als Funktionen von  $\bar{x}^{(4)}$  im allgemeinen<sup>1)</sup> keine geodätischen Linien der raumartigen Mannigfaltigkeiten  $\bar{x}^{(4)} = \text{const.}$  liefern werden, müssen wir das Galileische Trägheitsgesetz abändern:

Kräftefreie Massenpunkte beschreiben vielmehr im allgemeinen *krümmelige* Bahnen.

4. Die Bewegungsgleichungen für den nicht kräftefreien Massenpunkt lauten bei Minkowski:

$$(12) \quad E_0 \frac{d^2 x^{(h)}}{d\sigma^2} = K^{(h)}, \quad h = 1, 2, 3, 4,$$

wo  $E_0$  die innere Energie ist. Die Transformation liefert

1) Vgl. jedoch § 6, Punkt 3.

$$(12a) \left\{ E_0 \left\{ \frac{d}{d\sigma} \left( \sum_{k=1}^4 \bar{g}_{hk} \frac{\partial \bar{x}^{(k)}}{\partial \sigma} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^4 \frac{\partial \bar{g}_{kl}}{\partial \bar{x}^{(h)}} \frac{d \bar{x}^{(k)}}{d\sigma} \frac{d \bar{x}^{(l)}}{d\sigma} \right\} = \bar{K}_h, \right. \\ \left. h = 1, 2, 3, 4, \right.$$

wobei die innere Energie gemäß der Gleichungen (12) als Invariante angenommen ist. (Die Wahl der Masse anstatt der Energie würde die Einführung der Eigenzeit  $\tau$  bedingen, welche keine Invariante ist.) Die Kraft erfüllt dabei die bekannte Orthogonalitätsbedingung:

$$\sum_{h=1}^4 \bar{K}_h \frac{d \bar{x}^{(h)}}{d\sigma} = 0.$$

5. Dies auf unseren Fall anzuwenden, hat man das Bogenelement aufzustellen. (Vgl. I, Anhang 4). Man hat, um es nochmals abzuleiten:

$$X = x - \mathcal{B}' c_2 + \mathcal{X}' c_3 + \mathcal{Y}' c_4,$$

da ja selbstverständlich die „richtigen“ Koordinaten verwendet werden müssen. Aus den Frenetschen Formeln (I, Anhang 1) folgt dann:

$$\begin{aligned} dX &= ic d\mathcal{X}' \cdot (1 + \mathcal{B}'/R_1) \cdot c_1 \\ &\quad - d\mathcal{B}' \cdot c_2 + d\mathcal{X}' \cdot c_3 + d\mathcal{Y}' \cdot c_4, \end{aligned}$$

daher

$$(13) \quad dS^2 = (d\mathcal{X}')^2 + (d\mathcal{Y}')^2 + (d\mathcal{B}')^2 - c^2 \left( \frac{b + \mathcal{B}'}{b^2} \right)^2 (d\mathcal{X}')^2.$$

Vermöge seiner Herleitung aus dem Bogenelement der Minkowskischen Welt ist dies ein *euklidisches*, d. h. es verschwinden die Riemannsymbole.<sup>1)</sup>

Die Bewegungsgleichungen nehmen die Form an:

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \mathcal{X}'}{d\sigma^2} = 0, \\ \frac{d^2 \mathcal{Y}'}{d\sigma^2} = 0, \\ \frac{d^2 \mathcal{B}'}{d\sigma^2} + c^2 \frac{b + \mathcal{B}'}{b^2} \left( \frac{d\mathcal{X}'}{d\sigma} \right)^2 = 0, \\ \frac{d}{d\sigma} \left[ c^2 \left( \frac{b + \mathcal{B}'}{b} \right)^2 \frac{d\mathcal{X}'}{d\sigma} \right] = 0. \end{cases}$$

1) L. Bianchi, p. 571.

Hierbei ist

$$\left(\frac{d\mathfrak{X}'}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{d\mathfrak{Y}'}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{d\mathfrak{Z}'}{d\sigma}\right)^2 - c^2 \left(\frac{b+\mathfrak{Z}'}{b}\right)^2 \left(\frac{d\mathfrak{X}'}{d\sigma}\right)^2 = -1.$$

Ihre Integration ist leicht und liefert natürlich die Resultate (7a) bzw. (8) des § 3.

In Gemäßheit des sub 3 auseinandergesetzten Standpunktes nennen wir einen Massenpunkt, der gemäß (14) sich bewegt, beschleunigungsfrei. Dies steht im Widerspruch zu dem Usus der Lagrangeschen Mechanik, ist aber konform dem Postulat, nur vektorielle Bildungen in Betracht zu ziehen, welches die *gewöhnliche* Beschleunigung *nicht* ist. Nur bei dem Minkowskischen Bogenelement verschwindet die *gewöhnliche* Beschleunigung gleichzeitig mit der Minkowskischen. Hier ist das Analoge *nicht mehr* der Fall.

Es erhebt sich freilich die Frage, wie der Beobachter zu dieser Anschauung kommen könne. Dabei ist nun natürlich vorausgesetzt, daß er bereits im Besitze der richtigen Koordinaten, also des Bogens (13) ist. Hat er diese nicht, so operiert er mit den *scheinbaren Koordinaten* und einem *Minkowskischen Bogenelement*, er findet dann gemäß (10) *scheinbare Beschleunigungen*, da er ja an dem *Galileischen Trägheitsgesetz* festhält. Kommt er aber zur Erkenntnis der *Krümmung der Lichtstrahlen*, also des Bogens (13), so sieht er, daß die *einfachste Erklärung* für die von ihm beobachteten Fallbewegungen nicht die Annahme von Kräften ist, sondern die *Aufgabe des Galileischen Trägheitsgesetzes*.

Es möchte freilich scheinen, daß dies nur der Ersatz einer Benennung durch eine andere sei und das Wesen der Sache nicht berühre. Da es sich aber hier nicht um ontologische Fragen handelt, wollen wir, da *nur diese Auffassung mit dem Formalismus der Differentialvarianten verträglich ist*, an ihr festhalten. Das Trägheitsgesetz ist also durch das Bogenelement gegeben.

6. In analoger Weise kann man mit Hilfe der Differentialinvarianten, immer den Standpunkt der Transformation auf generalisierte Koordinaten vor Augen habend, die übrigen Formeln der Minkowski-Laueschen Dynamik, ferner die Maxwell'schen Gleichungen usw. auf das Bogenelement (13) übertragen.

Für die Lichtlinien ergeben sich natürlich Minimalgeodäten, also Gleichungen von der Form (14), wo aber  $\sigma$  durch einen Parameter  $u$  zu ersetzen und die Minimaleigenschaft

$$\left(\frac{d\mathfrak{X}}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\mathfrak{Y}}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\mathfrak{Z}}{du}\right)^2 - c^2 \left(\frac{b + \mathfrak{Z}'}{b}\right)^2 \left(\frac{d\mathfrak{X}}{du}\right)^2 = 0$$

zu fordern ist. Als Resultat erhält man wieder die Formeln des § 3 mit  $c^2 = g^2$ .

#### § 6. Messungen und die hyperbolische Geometrie.

1. Im vorigen Paragraphen war der Beobachter bereits im Besitze der richtigen Koordinaten, also des Bogens (13) anstatt des Minkowskischen, angenommen worden. Es erhebt sich die Frage, wie dies dem Beobachter möglich sei. Offenbar muß er einmal zur Erkenntnis der Krümmung der Lichtstrahlen gelangt sein. Ein diesbezügliches einfachstes Experiment wäre folgendes: Angenommen der Beobachter in  $B$  (Fig. 4) wolle die Entfernung von ihm zu einem zweiten Beobachter in  $\mathfrak{P}'$  messen, den er zunächst in  $P'$  sieht. Der eine Weg wäre ein Meßband von genügender Länge zwischen beiden ausspannen zu lassen und die *kürzeste* Entfernung  $B\mathfrak{P}'$  zu nehmen. Man kommt dadurch, da ja der Raum euklidisch sein soll, wie dies in (13) ausgedrückt ist, auf die gewöhnliche Gerade  $\overrightarrow{B\mathfrak{P}'}$ , der Beobachter erkennt hieraus sofort die Krümmung des Lichtstrahles, der ihm ja aus  $P'$  zu kommen schien, während das Meßband die Richtung  $\overrightarrow{B\mathfrak{P}'}$  angibt. Nun ist aber dieser Weg im allgemeinen nicht gangbar, die Krümmung der Lichtstrahlen, die ja von  $c^2/g$ , wo  $g$  die scheinbare Beschleunigung, abhängt, ist nicht so groß, daß sie sich auf so kurze Entfernungen verriete, andererseits die Ausspannung eines Meßbandes praktisch fast undurchführbar. Die Messungen geschehen tatsächlich durch Visur, daher durch das *Licht*.

2. Dem Charakter dieser Messungen tragen wir durch das folgende wiederum idealisierte Experiment Rechnung: Der Beobachter in  $B$  möge die Entfernung  $B\mathfrak{P}'$  aus der Lichtzeit  $B\mathfrak{P}'$  berechnen, wobei er natürlich konstantes  $c$  zugrunde legen wird. Dadurch wird ja dem Standpunkt der Visur, die die Gerade durch das Licht bestimmt, Rechnung getragen.

Ein Lichtstrahl braucht zur Zurücklegung der Strecke  $B\mathfrak{P}'$

$$\int \frac{\sqrt{(d\mathfrak{X}')^2 + (d\mathfrak{Y}')^2 + (d\mathfrak{Z}')^2}}{c'} = \int d\mathfrak{X}'$$

da infolge von (13)

$$c' = c \frac{b + \mathfrak{Z}'}{b}.$$

Aus einem Lichtsignal, das zur Zeit  $\mathfrak{X}_0'$  von  $B$  nach  $\mathfrak{P}'$  abgeht, dort zur Zeit  $\mathfrak{X}_1'$  anlangt und unmittelbar nach  $B$  zurückgeht, wo es zur Zeit  $\mathfrak{X}_2'$  wieder ankommt, wobei

$$\mathfrak{X}_1' - \mathfrak{X}_0' = \mathfrak{X}_2' - \mathfrak{X}_1'$$

sein wird, schließt der Beobachter auf die Entfernung

$$c \frac{\mathfrak{X}_2' - \mathfrak{X}_1'}{2} = c \Delta \mathfrak{X}'$$

und verlegt natürlich  $\mathfrak{P}'$  in die Richtung  $P'$ . Aber auf diese Weise kommt er nicht etwa zu den *scheinbaren* Koordinaten. Die so bestimmte Entfernung ist von der scheinbaren Entfernung *verschieden*.

Dies zu erkennen, berechnen wir die scheinbare Entfernung als Funktion dieser dritten Entfernung, welche gleich der richtigen Zeit mal  $c$  ist, aus den Formeln (2) und (4). Es war:

$$\begin{aligned} Z &= (b + \mathfrak{Z}') \operatorname{ch} u = (b + Z') \operatorname{ch} u - \sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2} \operatorname{sh} u \\ cT &= (b + \mathfrak{Z}') \operatorname{sh} u = (b + Z') \operatorname{sh} u - \sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2} \operatorname{ch} u. \end{aligned}$$

Dann ist offenbar die Lichtzeit durch

$$c \Delta T' = b(u - u)$$

die scheinbare Entfernung, aber durch  $\sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2}$  gegeben. Man hat nun

$$\begin{aligned} (b + \mathfrak{Z}') \operatorname{ch}(u - u) &= b + Z' \\ (b + \mathfrak{Z}') \operatorname{sh}(u - u) &= \sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2} \end{aligned}$$

woraus

$$\operatorname{tgh}(u - u) = \operatorname{tgh} \frac{c \Delta \mathfrak{X}'}{b} = \frac{\sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2}}{b + Z'}.$$

Daher sind *scheinbare Entfernung* und *Lichtzeitentfernung* verschieden. In der Grenze  $b = \infty$  werden sie natürlich beide



der richtigen Entfernung gleich. Wir befinden uns dann in der Minkowskischen Welt der geradlinigen Lichtstrahlen.

3. Wir sehen also die Möglichkeit, daß der Beobachter gar nicht zu dem Bogen (13) kommt, weil er die Gerade erst durch die Lichtstrahlen bestimmt. Läßt sich diesem Standpunkte widerspruchsfrei Rechnung tragen? Dies ist in der Tat möglich. Es ist eine Betrachtungsweise möglich, bei der die Lichtstrahlen als „Gerade“ des Raumes und die Lichtgeschwindigkeit  $c$  konstant angesehen werden. Dies zu erkennen, betrachten wir die konforme Abbildung

$$(15) d\bar{S}^2 = \left(\frac{b}{b+\beta'}\right)^2 dS^2 = \left(\frac{b}{b+\beta'}\right)^2 (d\mathfrak{X}'^2 + d\mathfrak{Y}'^2 + d\mathfrak{Z}'^2) - c^2 d\mathfrak{T}'^2.$$

Wir erkennen sofort: die Visurwinkel des Beobachters bleiben unverändert, da die Abbildung konform ist. Denken wir uns also in  $B$  ein Polarkoordinatensystem, dessen Radien Lichtstrahlen, dessen Entfernungen Lichtzeitentfernungen, dessen Winkel die Visurwinkel sind, so haben wir die Erhaltung der letzteren nachgewiesen, wir müssen noch die „Geradlinigkeit“ der Radien und die Erhaltung der Entfernung nachweisen.

Die Differentialgleichungen der Geodäten von (15) sind nun nach (11a):

$$(16) \begin{cases} \frac{d}{d\bar{\sigma}} \left[ \left(\frac{b}{b+\beta'}\right)^2 \frac{d\mathfrak{X}'}{d\bar{\sigma}} \right] = 0, \\ \frac{d}{d\bar{\sigma}} \left[ \left(\frac{b}{b+\beta'}\right)^2 \frac{d\mathfrak{Y}'}{d\bar{\sigma}} \right] = 0, \\ \frac{d}{d\bar{\sigma}} \left[ \left(\frac{b}{b+\beta'}\right)^2 \frac{d\mathfrak{Z}'}{d\bar{\sigma}} \right] + \frac{b^2}{(b+\beta')^3} \left\{ \left(\frac{d\mathfrak{X}'}{d\bar{\sigma}}\right)^2 + \left(\frac{d\mathfrak{Y}'}{d\bar{\sigma}}\right)^2 + \left(\frac{d\mathfrak{Z}'}{d\bar{\sigma}}\right)^2 \right\} = 0, \\ \frac{d}{d\bar{\sigma}} \left( c^2 \frac{d\mathfrak{T}'}{d\bar{\sigma}} \right) = 0, \end{cases}$$

wobei  $\bar{\sigma}$  einen Parameter bedeutet, für den

$$\begin{aligned} -\left(\frac{d\bar{S}}{d\bar{\sigma}}\right)^2 &= -\left(\frac{b}{b+\beta'}\right)^2 \left\{ \left(\frac{d\mathfrak{X}'}{d\bar{\sigma}}\right)^2 + \left(\frac{d\mathfrak{Y}'}{d\bar{\sigma}}\right)^2 + \left(\frac{d\mathfrak{Z}'}{d\bar{\sigma}}\right)^2 \right\} + c^2 \left(\frac{d\mathfrak{T}'}{d\bar{\sigma}}\right)^2 \\ &= h^2 = \begin{matrix} 1 & \text{zeitartige} \\ 0 & \text{lichtartige} \end{matrix} \text{ Weltlinien.} \end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung (16) folgt

$$k d\bar{\sigma} = d\mathfrak{X}',$$

wo  $k$  eine Konstante ist. Die dritte Gleichung kann geschrieben werden:

$$\frac{d}{d\bar{\sigma}} \left[ \left( \frac{b}{b+\mathfrak{B}'} \right)^2 \frac{d\mathfrak{B}'}{d\bar{\sigma}} \right] + \frac{1}{b+\mathfrak{B}'} \left\{ c^2 \left( \frac{d\mathfrak{X}'}{d\bar{\sigma}} \right)^2 - k^2 \right\} = 0$$

oder

$$\frac{d^2}{d\bar{\sigma}^2} \left( \frac{1}{b+\mathfrak{B}'} \right) = \frac{1}{b+\mathfrak{B}'} \frac{c^2 k^2 - k^2}{b^2},$$

woraus die Integrale von (16) in der Form:

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{X}' = \mathfrak{X}_1' + (b + \mathfrak{B}_1') \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \operatorname{tgh} \left[ \frac{\sqrt{c^2 - k^2/k^2}}{b} (\mathfrak{X}' - \mathfrak{X}_1') \right], \\ \mathfrak{Y}' = \mathfrak{Y}_1' + (b + \mathfrak{B}_1') \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \operatorname{tgh} \left[ \frac{\sqrt{c^2 - k^2/k^2}}{b} (\mathfrak{X}' - \mathfrak{X}_1') \right], \\ b + \mathfrak{B}' = (b + \mathfrak{B}_1') \frac{1}{\cosh \left[ \frac{\sqrt{c^2 - k^2/k^2}}{b} (\mathfrak{X}' - \mathfrak{X}_1') \right]}, \end{array} \right.$$

mit  $\alpha, \beta, \mathfrak{B}_1', \mathfrak{X}_1'$  als Integrationskonstanten, wobei  $\mathfrak{X}_1'$  der gewisse Zeitpunkt der vertikalen Umkehr ist, fließen. Durch Vergleich mit (8) in § 3 bestätigt man für Lichtlinien, also

$$c^2 = g^2 \quad \text{bzw.} \quad h^2 = 0,$$

daß die konforme Abbildung, wie ja selbstverständlich ist, die Minimalgeodäten, eben die Lichtlinien, enthält. Punkte, die also  $B$  auf einem Lichtstrahl, d. i. einem „Radius“ seines Polarsystems sieht, bleiben auch für den Bogen (15) auf einem und demselben Lichtstrahl. Die Polarwinkel bleiben also, wie bereits erwähnt, erhalten. Nunmehr sind aber (dies ist wesentlich) die Radien „Gerade“ des „Raumes“.

Dies ergibt sich aus den Differentialgleichungen der Geodäten des „Raumes“, dessen Bogenelement ja wegen (15)

$$(18) \quad d\bar{s}^2 = \left( \frac{b}{b+\mathfrak{B}'} \right)^2 (d\mathfrak{X}'^2 + d\mathfrak{Y}'^2 + d\mathfrak{B}'^2)$$

ist. Diese Differentialgleichungen sind mit den ersten drei von (16) *identisch*, wenn nur dort  $\bar{\sigma}$  durch  $\bar{s}$  ersetzt wird. Nun ist

$$\text{wegen } \frac{d\bar{\sigma}}{d\mathfrak{X}'} = k$$

$$\left( \frac{d\bar{s}}{d\bar{\sigma}} \right)^2 = \left( \frac{d\bar{s}}{d\mathfrak{X}'} \right)^2 - c^2 k^2 = -k^2,$$

also

$$d\bar{s} = \sqrt{c^2 - h^2/k^2} d\mathfrak{X}'.$$

Die „Geraden“ des „Raumes“ haben sich damit ergeben:

$$(17a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{X}' = \mathfrak{X}_1' + (b + \mathfrak{B}_1) \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \operatorname{tgh} \frac{\bar{s} - \bar{s}_1}{b}, \\ \mathfrak{Y}' = \mathfrak{Y}_1' + (b + \mathfrak{B}_1) \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \operatorname{tgh} \frac{\bar{s} - \bar{s}_1}{b}, \\ b + \mathfrak{B}' = (b + \mathfrak{B}_1) \frac{1}{\cosh \frac{\bar{s} - \bar{s}_1}{b}}, \end{array} \right.$$

womit die Kurven (17) als „Gerade“ nachgewiesen sind, die mit gleichförmiger Geschwindigkeit

$$\frac{d\bar{s}}{d\mathfrak{X}'} = \sqrt{c^2 - h^2}/h^2$$

durchlaufen werden. Es gilt also das Galileische Trägheitsgesetz.

Für Lichtstrahlen ( $h = 0$ ) folgt insbesondere: Für das Bogenelement (15) sind die Lichtstrahlen des Bogens (13) „Gerade“ des Raumes und werden mit konstanter gleichförmiger Geschwindigkeit  $c$  durchlaufen.

Der Standpunkt des Beobachters ist also widerspruchsfrei, sofern der euklidische Raum durch einen anderen ersetzt wird.

4. Was ist dies nun für ein „Raum“, dessen Bogen durch (18) gegeben ist? Dies ist nichts anderes als die aus der nichteuklidischen Geometrie wohlbekannte Darstellung des hyperbolischen Raumes vom Krümmungsmaß

$$K = -\frac{1}{R^2} = -\frac{1}{b^2}$$

in Grenzkugelkoordinaten.<sup>1)</sup>

Der Krümmungsradius  $R$  ist also gleich dem Krümmungsradius  $R_1$  der Weltlinie des Beobachters. Schreibt man:

$$d\bar{s}^2 = \left(\frac{b}{b + \mathfrak{B}'}\right)^2 \{d\mathfrak{X}'^2 + d\mathfrak{Y}'^2 + d\mathfrak{B}'^2\} = \left(\frac{b}{b + \mathfrak{B}'}\right)^2 ds^2,$$

so hat man die bekannte Poincaré-Kleinsche konforme Abbildung<sup>2)</sup> des hyperbolischen Raumes auf den euklidischen Halbraum  $b + \mathfrak{B}' > 0$ . Die „Geraden“ des hyperbolischen Raumes

1) L. Bianchi, l. c. p. 581 oder H. Liebmann, Nichteuklidische Geometrie, p. 56. Leipzig 1905.

2) L. Bianchi, l. c. p. 419f. oder p. 583f.

bilden sich dann als die (Halb-)Kreise ab, die die Grenzebene  $b + \beta' = 0$  senkrecht schneiden. Ihre Gleichungen als Funktionen des Bogens  $s$ , d. i. der geodätischen Entfernung sind eben durch (17a) gegeben.<sup>1)</sup> Die Ebenen  $b + \beta' = \text{const.}$  sind die Bilder von „Grenzkugeln“, d. h. „Kugeln“, deren Mittelpunkt unendlich fern liegt und die das konstante Krümmungsmaß Null haben, also auf die euklidische Ebene abwickelbar sind. Die „Geraden“  $\mathcal{X}' = \text{const.}$ ,  $\mathcal{Y}' = \text{const.}$ , die auch im euklidischen Bild durch Gerade gegeben sind, sind die Orthogonaltrajektorien der geodätisch parallelen, konzentrischen Grenzkugeln  $b + \beta' = \text{const.}$ , nach deren unendlich fernem Mittelpunkt sie konvergieren.

Die unendlich fernen Punkte bilden sich ab als die Punkte der Grenzebene  $b + \beta' = 0$ . Wir wissen aus § 2, Punkt 3, daß dies auch für das beschleunigte Bezugssystem eine unendlich ferne Grenzebene ist. Die Lichtstrahlen als Halbkreise, die die Grenzebene senkrecht schneiden (Fig. 3), sind natürlich, wie wir schon aus (17a) und (8) sahen, „Gerade“ usw. Man sieht, daß also der *hyperbolische Raum* die Anschauung des Beobachters, daß das Licht im leeren Raum sich „geradlinig“ und gleichförmig fortpflanzt, widerspruchsfrei verwirklicht.

Es besteht die Möglichkeit, daß der Beobachter über diesen hyperbolischen Charakter des von ihm mit Hilfe der „Lichtgeraden“ konstruierten Raumes sich durch die Erfahrung (Parallelwinkel!) unterrichtet. Da aber die Natur des Raumes eine *Erfahrungstatsache* ist, ist es möglich, daß er auch dann noch am Bogenelement (15) an Stelle von (13) festhält.<sup>2)</sup> Wir wollen darum die Fallerscheinungen (8) auch vom Standpunkt (15) studieren.

1) L. Bianchi, p. 584.

2) H. Poincaré (La Science et l'Hypothèse, Paris Flammarion, Chap. V, 3, p. 93), der einen solchen Fall in Betracht zieht, ist anderer Meinung. Dem Standpunkt Poincarés, der die erkenntnistheoretische Gleichberechtigung beider Raumauffassungen betont, die ja auch in unserem Falle zwischen (13) und (15) besteht, ist das Gesetz der mathematischen Ökonomie entgegenzuhalten. Eine Physik, in welcher die Lichtstrahlen sich „geradlinig“ und gleichförmig fortpflanzen und kräftefreie Massenpunkte „geradlinig“ und gleichförmig sich bewegen, ist gewiß mathematisch einfacher zu handhaben.

## § 7. Die Fallbewegung in hyperbolischer Raumauffassung.

1. Es ist von vornherein klar, daß die Fallbewegung (8) für (15) nicht aus dem Trägheitsgesetz folgen kann, anders ausgedrückt, daß die Weltlinien (7a) der Fallbewegung (8), für  $c^2 > q^2$  nicht Geodäten von (15) sind. Denn die konforme Abbildung von (13) auf (15) erhält ja bloß die Minimalgeodäten  $c^2 = q^2$ . Man sieht dies aus der Abbildung auf den euklidischen Halbraum  $b + \mathfrak{J}' > 0$ . Hier sind nach Fig. 5 die Bahnen der Fallbewegung *Ellipsen*, die die Grenzebene senkrecht schneiden, während sie *Kreise* sein müßten, um zufolge (15) Trägheitsbahnen zu sein.

2. Wir müssen also *Kräfte* suchen, die die Fallbewegung erzeugen. Diese findet man folgendermaßen: Für die Fallbewegung sind ja die Gleichungen (14) erfüllt. Man hat diese also mit Hilfe von

$$d\bar{\sigma} = \frac{b}{b + \mathfrak{J}'} d\sigma$$

bloß so umzuschreiben, daß die linken Seiten den linken Seiten von (16) gleich werden. Dann stehen rechts die gesuchten Kräfte. Man findet so die folgenden Gleichungen der Fallbewegung in hyperbolischer Raumauffassung:

$$(19) \left\{ \begin{aligned} E_0 \frac{d}{d\bar{\sigma}} \left[ \left( \frac{b}{b + \mathfrak{J}'} \right)^2 \frac{d\mathfrak{X}'}{d\bar{\sigma}} \right] &= - E_0 \left( \frac{b}{b + \mathfrak{J}'} \right)^2 \frac{d\mathfrak{J}'}{d\bar{\sigma}} \frac{d\mathfrak{X}'}{d\bar{\sigma}}, \\ E_0 \frac{d}{d\bar{\sigma}} \left[ \left( \frac{b}{b + \mathfrak{J}'} \right)^2 \frac{d\mathfrak{Y}'}{d\bar{\sigma}} \right] &= - E_0 \left( \frac{b}{b + \mathfrak{J}'} \right)^2 \frac{d\mathfrak{J}'}{d\bar{\sigma}} \frac{d\mathfrak{Y}'}{d\bar{\sigma}}, \\ E_0 \frac{d}{d\bar{\sigma}} \left[ \left( \frac{b}{b + \mathfrak{J}'} \right)^2 \frac{d\mathfrak{Z}'}{d\bar{\sigma}} \right] + \frac{E_0}{b + \mathfrak{J}'} \left\{ c^2 \left( \frac{d\mathfrak{Z}'}{d\bar{\sigma}} \right)^2 - 1 \right\} &= - E_0 \left( \frac{b}{b + \mathfrak{J}'} \right)^2 \frac{d\mathfrak{J}'}{d\bar{\sigma}} \frac{d\mathfrak{Z}'}{d\bar{\sigma}} - E_0 \frac{1}{b + \mathfrak{J}'}, \\ E_0 \frac{d}{d\bar{\sigma}} \left( c^2 \frac{d\mathfrak{T}'}{d\bar{\sigma}} \right) &= - E_0 \frac{c^2}{b + \mathfrak{J}'} \frac{d\mathfrak{J}'}{d\bar{\sigma}} \frac{d\mathfrak{T}'}{d\bar{\sigma}}. \end{aligned} \right.$$

Dabei wurde die dritte Gleichung (16) mit Hilfe der Beziehung

$$c^2 \left( \frac{d\mathfrak{X}'}{d\bar{\sigma}} \right)^2 - \left( \frac{b}{b+\mathfrak{J}'} \right)^2 \left\{ \left( \frac{d\mathfrak{X}'}{d\bar{\sigma}} \right)^2 + \left( \frac{d\mathfrak{Y}'}{d\bar{\sigma}} \right)^2 + \left( \frac{d\mathfrak{Z}'}{d\bar{\sigma}} \right)^2 \right\} = 1$$

transformiert. Man hat also für die (kovarianten) Kräfte:

$$(20) \quad \begin{cases} \mathfrak{R}_{x'} = K_1 = - \frac{E_0}{b+\mathfrak{J}'} \frac{d\mathfrak{Z}'}{d\bar{\sigma}} \cdot \left( \frac{b}{b+\mathfrak{J}'} \right)^2 \frac{d\mathfrak{X}'}{d\bar{\sigma}}, \\ \mathfrak{R}_{y'} = K_2 = - \frac{E_0}{b+\mathfrak{J}'} \frac{d\mathfrak{Z}'}{d\bar{\sigma}} \cdot \left( \frac{b}{b+\mathfrak{J}'} \right)^2 \frac{d\mathfrak{Y}'}{d\bar{\sigma}}, \\ \mathfrak{R}_{z'} = K_3 = - \frac{E_0}{b+\mathfrak{J}'} \frac{d\mathfrak{Z}'}{d\bar{\sigma}} \cdot \left( \frac{b}{b+\mathfrak{J}'} \right)^2 \frac{d\mathfrak{Z}'}{d\bar{\sigma}} - \frac{E_0}{b+\mathfrak{J}'}, \\ \mathfrak{R}_{\bar{\sigma}} = \frac{c}{i} K_4 = - \frac{E_0}{b+\mathfrak{J}'} \frac{d\mathfrak{Z}'}{d\bar{\sigma}} c^2 \frac{d\mathfrak{T}'}{d\bar{\sigma}}. \end{cases}$$

Es folgt, daß die Orthogonalitätsbedingung

$$\sum_{h=1}^4 K_h \frac{dx'^{(h)}}{d\bar{\sigma}} = \mathfrak{R}_{x'} \frac{d\mathfrak{X}'}{d\bar{\sigma}} + \mathfrak{R}_{y'} \frac{d\mathfrak{Y}'}{d\bar{\sigma}} + \mathfrak{R}_{z'} \frac{d\mathfrak{Z}'}{d\bar{\sigma}} - \mathfrak{R}_{\bar{\sigma}} \frac{d\mathfrak{T}'}{d\bar{\sigma}} = 0$$

erfüllt ist.

3. Die Formeln (20) laden zur Anwendung der Skalartheorie ein. Bei dieser ist bekanntlich<sup>1)</sup> die Orthogonalitätsbedingung nicht eo ipso erfüllt. Es muß also mit Minkowski eine Zusatzkraft hinzugefügt werden, was Abraham<sup>2)</sup> bekanntlich darauf zurückgeführt hat, daß dem Massenpunkt nicht-mechanische Energie (z. B. Wärme) zugeführt wird, Nordström<sup>3)</sup> bei der Gravitation im Sinne einer Veränderung der trägen Masse bei Bewegung durch das Feld deutet.

Wir nehmen als Potential das stets positive

$$(21) \quad \Phi = \frac{c^2}{b} (b + \mathfrak{J}'),$$

in welchem man das Potential der scheinbaren Beschleunigung (§ 4, Punkt 4) erkennt. Als Impuls des Massenpunktes hat man gemäß (15) in kovarianter Form mit  $d\bar{\sigma} = c d\tau$ :

1) M. Abraham, Phys. Zeitschr. 13. p. 1. 1912.

2) M. Abraham, l. c. 11. p. 527. 1910.

3) G. Nordström, l. c. 13. p. 1126. 1912.

$$\mathfrak{G}_{x'} = G_1 = \frac{E_0}{c^2} \left( \frac{b}{b + \mathfrak{B}'} \right)^2 \frac{d\mathfrak{X}'}{d\tau},$$

$$\mathfrak{G}_{y'} = G_2 = \frac{E_0}{c^2} \left( \frac{b}{b + \mathfrak{B}'} \right)^2 \frac{d\mathfrak{Y}'}{d\tau},$$

$$\mathfrak{G}_{z'} = G_3 = \frac{E_0}{c^2} \left( \frac{b}{b + \mathfrak{B}'} \right)^2 \frac{d\mathfrak{Z}'}{d\tau},$$

$$\mathfrak{G}_{x'} = \frac{c}{i} G_4 = \frac{E_0}{c^2} c^2 \frac{d\mathfrak{X}'}{d\tau}.$$

Aus (20) folgt sohin:

$$K = - \frac{1}{\Phi} \frac{d\Phi}{d\tau} \cdot G - E_0 \cdot \frac{1}{\Phi} \cdot \text{Grad } \Phi,$$

welches mit

$$M_g = \frac{E_0}{c^2}$$

als Massenkonstante<sup>1)</sup> eine formale Ähnlichkeit mit Nordströms zweiter Theorie hat. Durch  $E_0/c^2$  kann in (19) gekürzt werden. Der Sinn der Nordströmschen Theorie ist natürlich ein anderer, wie man durch Vergleichung seines Bogenelementes<sup>2)</sup>, d. h. desjenigen Bogenelementes, das die Nordströmschen Gleichungen als *geodätische* (Trägheitsbewegungen) liefert, mit (15) erkennt.

4. Die Wurfbahn ist hier, da das konforme Abbild (§ 4, Punkt 3) eine die Grenzebene senkrecht schneidende Ellipse war, ein Kegelschnitt der hyperbolischen Ebene, wie man in homogenen Weierstraßschen Koordinaten<sup>3)</sup> zeigt.

Was das Potential (21) anlangt, so erfüllt dies *nicht* die zu (15) gehörige Laplacesche Gleichung; das zu (15) gehörige Newton-Coulombsche Potential wäre vielmehr<sup>4)</sup>

1) G. Nordström, Ann. d. Phys. 42. p. 533. 1913. Bei Nordström bedeutet der Buchstabe  $E_0$  etwas anderes als hier; bei ihm ist  $E_0$  die Energie bei Transformation auf Ruhe, hier die Energie bei dauernder Ruhe, also außerhalb aller Felder.

2) A. Einstein u. A. D. Fokker, Ann. d. Phys. 44. p. 324. 1914.

3) H. Liebmann, l. c. p. 182.

4) H. Liebmann, l. c. p. 227, wo man nur die Transformation zu machen hat:

$$b e^{\zeta/b} = b + \mathfrak{B}'.$$

$$c^2 \left( \frac{b+3}{b} \right)^2.$$

Trotz dieser Abweichung besteht geometrisch eine Ähnlichkeit mit dem zu (15) gehörigen Newton-Coulombschen Potential; die Äquipotentialflächen sind bei beiden konzentrische Grenzkugeln, die Kraftlinien  $\propto^2$  gegen den unendlich fernen Mittelpunkt konvergierende Parallele. (Die Konvergenz der Parallelen ist eine Eigentümlichkeit der hyperbolischen Geometrie.)

5. Schließlich möge noch auf eine gewisse Ähnlichkeit mit einer von A. Byk entwickelten Theorie<sup>1)</sup> hingewiesen werden, der gezeigt hat, daß die *Quantentheorie* ihre einfachste Erklärung in der Annahme einer (starken) hyperbolischen Krümmung des Innenraumes der Materie findet. Für den Außenraum postuliert er euklidische Geometrie. Hier ergibt sich, wenn wir zufolge der Einsteinschen Äquivalenzhypothese die Vorgänge im Schwerfeld aus dem beschleunigten System deduzieren, daß eine *einfachste Erklärung* der Vorgänge im Schwerfeld wenigstens in unendlich großer Entfernung von der Materie (welche wir uns ja in dem erwähnten unendlich fernen Mittelpunkt der Grenzkugeln zu denken haben) bei Aufrechterhaltung konstanter Lichtgeschwindigkeit und der Form des Galileischen Trägheitsgesetzes gegeben werden kann, indem dem Raum (schwache) hyperbolische Krümmung zugeschrieben wird, wobei der Krümmungsradius der konstanten Beschleunigung des Schwerfeldes verkehrt proportional ist. Die Fallbewegungen haben wir dann unter Zuhilfenahme eines dem Coulombschen analogen Potentials zu erklären. Wenn man dies mit der Bykschen Theorie in Verbindung setzen will, hat man also ein allmähliches Abklingen der Krümmung im Außenraum anzunehmen, woraus sich die Möglichkeit einer vollständigen Theorie der Materie auf elektromagnetischer Grundlage vermuten läßt.

6. Zur Aufstellung einer solchen reicht die Einsteinsche Äquivalenzhypothese nicht aus. Von den Bahnkurven einer eingliederigen orthogonalen Transformationsgruppe, auf die

---

1) A. Byk, Ann. d. Phys. 42. p. 1417f. 1913.



sie nach I anwendbar wäre, liefert nämlich nur die Hyperbelbewegung ein Lichtgeschwindigkeitsfeld, das bloß mit dem Ort variiert, die übrigen Typen ein solches, das überdies auch mit der Richtung des Strahls variiert.<sup>1)</sup> Die skalare, nicht tensorielle Natur des Lichtgeschwindigkeitsfeldes wird aber gefordert, wenn man die Atomkräfte als Zentralkräfte ansieht.

Es muß also eine neue Hypothese aufgestellt werden. Für das statische Feld eines Atoms, das man mit J. J. Thomson am einfachsten als gleichförmig geladene positive Kugel ansehen wird, liegt im Sinne der Einsteinschen Theorie der Ansatz nahe:

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - C^2 dt^2$$

mit der Annahme: die Lichtgeschwindigkeit  $C$  soll dem Newton-Coulombschen Potential proportional sein. In unendlicher Entfernung vom Atom erhält man dann tatsächlich (13), im Innern, wenn  $r$  die Entfernung vom Mittelpunkt,  $C_0$ ,  $R$  Atomkonstanten sind:

$$C = C_0 \frac{R^2 - r^2}{2R^2},$$

so daß die konforme Abbildung analog wie im § 6

$$d\bar{S}^2 = \left(\frac{2R^2}{R^2 - r^2}\right)^2 dS^2 = \left(\frac{2R^2}{R^2 - r^2}\right)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) C_0^2 dt^2$$

konstante Lichtgeschwindigkeit und konstante hyperbolische Krümmung des Innenraumes des Atoms, wie bei Byk, liefert. Dies zeigt man durch Einführung von Polarkoordinaten, wobei die euklidische Entfernung  $r$  und die hyperbolische  $\varrho$  wie folgt zusammenhängen:

$$r = R \operatorname{tgh} \frac{C}{2R}.$$

---

1) Der von P. Ehrenfest (Amsterdam Proceedings 30. V. 1913) und Ch. H. van Os (ebenda 3. IX. 1913) gegebenen Ausdehnung der Einsteinschen Äquivalenzhypothese, wobei die Hyperbelbewegung als Spezialfall einer ganzen Klasse auftritt, liegen, wie an anderer Stelle gezeigt werden wird, gewisse Bahnen einer eingliedrigen konformen Gruppe und eine von H. Bateman gegebene Erweiterung der Lorentztransformation zugrunde.

Da hier nicht Lagrangesche, sondern Einstein-Großmannsche Bewegungsgleichungen gelten, hat man (vgl. Absatz 4) einige Unterschiede gegen Byks Mechanik: z. B. Nordströmsche Variabilität der Masse, Ersatz des Byks elastischen Potentials durch ein ähnliches

$$\left( \text{proportional } \frac{1}{ch^2 \frac{\varrho}{2R}} \right) \text{ usw.}$$

Zur Erreichung eines brauchbaren Quantenmodells wären dann vielleicht Bohrs Vorstellungen heranzuziehen. (Strahlungsfreiheit der gleichförmigen Rotation vgl. I § 5.)

(Eingegangen 17. Juni 1914.)

**3. Intensitätsverhältnis  
lang- und kurzwelliger elektrischer Komponenten  
der Serienlinien des Wasserstoffs;  
von H. Lunelund.**

Inhalt: § 1. Aufgabe und Methoden. — § 2. Abhängigkeit des Intensitätsverhältnisses einer lang- und einer kurzwelligen Komponente gleicher Nummer von der Geschwindigkeit der Kanalstrahlen. — § 3. Abhängigkeit des Intensitätsverhältnisses von der Komponentennummer. § 4. Resultate.

§ 1. Aufgabe und Methoden.

Bekanntlich zeigt im Fall der elektrischen Zerlegung das Intensitätsverhältnis der Komponenten gewisser Linien eine auffallende Abhängigkeit von der elektrischen Feldstärke.<sup>1)</sup> In stärkeren Feldern verschwindet jene Dissymmetrie, aber es tritt bei den Wasserstoffkanalstrahlen in reinem Wasserstoff eine andere merkwürdige Intensitätsdissymmetrie auf. Bei Gleichschaltung, d. h. wenn die Wasserstoffkanalstrahlen in der Richtung des Feldes laufen, erscheinen, wie zuerst J. Stark<sup>2)</sup> beobachtete, die langwelligen äußeren, parallel und senkrecht zum Feld schwingenden Komponenten intensiver als die kurzwelligeren Komponenten. Bei Gegenschaltung, wenn also das Feld den Kanalstrahlen entgegen gerichtet ist, überwiegt, wie J. Stark u. H. Kirschbaum<sup>3)</sup> und W. Wilsar<sup>4)</sup> fanden, die Intensität der Komponenten kürzerer Wellenlänge. H. Wilsar hat auch Schwärzungsmessungen an den äußeren *p*-Komponenten (parallel zum Feld schwingend) gemacht.

Die genannten Forscher stellen nur einen Schwärzungs- und somit einen Intensitätsunterschied zwischen den lang- und kurzwelligen Komponenten der Wasserstofflinien fest, Mes-

1) J. Stark u. H. Kirschbaum, Ann. d. Phys. 43. p. 999. 1914.

2) J. Stark, Ann. d. Phys. 43. p. 972. 1914.

3) J. Stark u. H. Kirschbaum, Ann. d. Phys. 43. p. 1006. 1914.

4) H. Wilsar, Gött. Nachr. 1914.

sungen über das Intensitätsverhältnis dieser Komponenten haben sie nicht mitgeteilt. Bei der theoretischen Bedeutung, welche die Umkehrbarkeit jenes Intensitätsverhältnisses zu besitzen scheint, ist es wünschenswert, zunächst für bestimmte Versuchsbedingungen Zahlenwerte für das Intensitätsverhältnis sowohl der  $p$ - wie  $s$ -Komponenten mehrerer Serienlinien zu ermitteln. Weiter gilt es zu prüfen, ob das Intensitätsverhältnis von der Geschwindigkeit der Kanalstrahlen abhängt. Diese Fragen stellen sich schon für den Fall der Grobzerlegung der H-Serienlinien bei schwachem elektrischen Feld. Nachdem von J. Stark u. H. Kirschbaum<sup>1)</sup> in sehr starken Feldern eine Zerlegung der H-Serienlinien in zahlreiche Komponenten (Feinzerlegung) aufgefunden ist, gewinnt die Untersuchung des Intensitätsverhältnisses lang- und kurzwelliger Komponenten gleicher Nummer Interesse für die Beantwortung der Frage nach der Zuordnung von  $p$ - und  $s$ -Komponenten, worauf bereits von J. Stark<sup>2)</sup> hingewiesen worden ist.

Auf freundliche Anregung von Hrn. Prof. J. Stark unternahm ich es im *Aachener* Physikal. Institut die vorstehenden Aufgaben zu lösen.

Die von mir benutzte Versuchsanordnung war die folgende.

$AC$  ist die Spektralröhre in der von Stark angegebenen Form, und zwar ist  $A$  die Anode,  $B$  die Kathode und  $C$  eine Hilfselektrode. Die gesamte Röhrenlänge betrug 20—25 cm, der Durchmesser etwa 5 cm, der Abstand  $AB$  10—15 cm. Die scheibenförmigen Elektroden  $A$  und  $C$  bestanden aus 2—3 mm dickem Aluminium, die Kathode  $B$  war ebenfalls eine 2 mm dicke Aluminiumscheibe mit dicht nebeneinanderliegenden 1 mm weiten Löchern versehen. Der Abstand  $BC$  betrug 1,2—2,1 mm.

Zwischen  $A$  und  $B$  wird mittels einer Hochspannungsquelle ein Glimmstrom hergestellt und der Gasdruck so gewählt, daß der Kathodenfall 2500—10000 Volt beträgt. An die Hilfselektrode  $C$  und die Kathode  $B$  wird unter Vorschaltung eines Widerstandes eine Gleichstromquelle gelegt,

1) Vgl. J. Stark, Die elektrische Spektralanalyse chemischer Atome. p. 53. 1914. S. Hirzel.

2) J. Stark, Die elektrische Spektralanalyse. p. 63.

und zwar kann man dabei entweder die Gleichschaltung, d. h. Kanalstrahlen und Feld gleichgerichtet oder die Gegenschaltung wählen. Welche Schaltung für die Untersuchung der Intensitätsverhältnisse lang- und kurzweiliger Komponenten vorzuziehen ist, wird weiter unten erörtert werden.

Bei dem oben angegebenen Gasdruck kann sich im Spannungsfeld kein Glimmstrom bilden, es entsteht nur eine unselbständige Strömung, die erlischt, sobald der Glimmstrom zwischen *B* und *C* unterbrochen wird. Jedoch ist im Fall eines

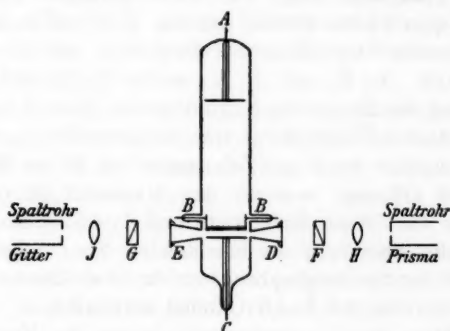


Fig. 1.

starken Feldes große Vorsicht nötig, damit kein Lichtbogenfunke zwischen den Elektroden überspringt, denn dadurch kann die Röhre zerstört werden.

Die durch die Kanalstrahlen in dem Spannungsfelde hinter der Kathode bewirkte Lichtemission wurde senkrecht zur Richtung der Strahlen und des Feldes beobachtet (Quereffekt). Da sich die Röhrenwand infolge der Zerstäubung der Elektroden durch die Kanalstrahlen rasch mit einer lichtabsorbierenden Metallschicht bedeckte, wurde durch die beiden Seitenröhre *D* und *E* beobachtet. Auf dieselben waren kleine Glasplatten gekittet.

Die photographischen Aufnahmen der Serienlinien des Wasserstoffs wurden gleichzeitig mit einem sehr lichtstarken Prismenspektrographen und einem etwas lichtschwächeren Plan- gitterspektrographen gemacht. Die Dispersion des Prismen-

spektrographen betrug für  $\lambda$  4100 Å. ungefähr 1:16 mm:Å. für ein Kameraobjektiv von 30 cm Brennweite (ein Zeisstessar von 1:3,5 Öffnungsverhältnis). Als Spaltrohrobjektiv wurde ein Achromat von 30 cm Brennweite und 1:6,5 Öffnungsverhältnis verwendet.

Die Aufnahmen mit dem Prismenspektrographen wurden hauptsächlich für die Untersuchung von  $H_\delta$  benutzt, für das Studium von  $H_\beta$  und  $H_\gamma$  waren die mit dem Plangitterspektrographen erhaltenen Photogramme besser geeignet.

Das Plangitter besaß bei einer geteilten Fläche von  $6,5 \times 9,6$  qcm 15000 Striche auf den Zoll und hatte für  $H_\delta$  fast die gleiche Lichtstärke und Dispersion wie der Prismenspektrograph. Bei  $H_\beta$  und  $H_\gamma$ , für welche die Einstellung scharf war, betrug die Dispersion 1:15,3 mm:Å. bzw. 1:17 mm:Å. Erst bei starker Überlichtung trat der erste Geist hervor. Als Spaltrohrobjektiv wurde ein Zeisstessar von 59 cm Brennweite und 1:6,3 Öffnung benutzt; das Kameraobjektiv war ein Zeisstessar von 50 cm Brennweite und 1:4,5 Öffnung.

Für die Abbildung des leuchtenden Spannungsfeldes auf die Spalte der Spektrographen wurden zwei Zeisstessare von 5 cm Brennweite und 1:3,5 Öffnung verwendet.

Um über die Polarisationsverhältnisse der Komponenten Aufschluß zu erhalten wurde zwischen die Kanalstrahlenröhre und das Zeisstessar eine Wollastonplatte so gestellt, daß die zwei infolge der Doppelbrechung entstehenden Bilder der Wasserstofflinien genau übereinanderlagen und gleiche Intensität besaßen. Man erhielt auf solche Weise auf einmal die parallel und senkrecht zu dem Felde schwingenden Komponenten.

Als Platten kamen fast ausschließlich Agfa (extra rapid) zur Verwendung. Nur bei einer 24stündigen Aufnahme wurde beim Gitterspektrographen eine empfindliche Wellingtonplatte benutzt.

Ob beim Studium der Intensitätsverhältnisse Gleich- oder Gegenschaltung vorzuziehen ist, ergibt sich aus folgender Überlegung.

Die positiven Atomionen, die in dem Spannungsfeld infolge von Stoßionisierung entstehen, werden von ihm in seiner Richtung beschleunigt und werden so zu Kanalstrahlen, welche immer in der Richtung des Feldes verlaufen. Bei Gleich-

schaltung haben somit diese sekundären Kanalstrahlen dieselbe Richtung wie die primären Strahlen, darum hat auch der Intensitätsunterschied der Komponenten der Linien der zwei Strahlenarten dasselbe Vorzeichen. Bei Gegenschaltung verlaufen dagegen die zwei Strahlenarten entgegengesetzt zueinander und jener Intensitätsunterschied hat für sie jetzt entgegengesetztes Vorzeichen; der aus der Überlagerung sich ergebende beobachtbare Intensitätsunterschied ergibt sich daraus für die Gegenschaltung kleiner als für die Gleichschaltung. Die Gleichschaltung bietet demnach reinlichere Bedingungen und kommt daher für die genaue Untersuchung des Intensitätsverhältnisses lang- und kurzweiliger Komponenten allein in Betracht.

Gilt es speziell die Abhängigkeit des Intensitätsverhältnisses von der Geschwindigkeit der Kanalstrahlen zu untersuchen, sind schwache zerlegende Felder zu verwenden. Es addiert sich nämlich die durch das Feld bewirkte Geschwindigkeit zu derjenigen aus dem Kathodenfall. Ist das Feld schwach, so ist auch die dadurch hervorgebrachte Geschwindigkeit der positiven Strahlen klein und neben der Geschwindigkeit aus dem Kathodenfall zu vernachlässigen.

Zu beachten ist übrigens, daß einem bestimmten Kathodenfall nicht eine einzige Kanalstrahlengeschwindigkeit entspricht, sondern in jedem Strahlenbündel kommt eine stetige Reihe von Geschwindigkeiten vor. Eine Vergrößerung des Kathodenfalles hat also lediglich eine Vermehrung der Zahl der größeren Geschwindigkeiten zur Folge.

## § 2. Abhängigkeit des Intensitätsverhältnisses einer lang- und einer kurzweiligen Komponente gleicher Nummer von der Geschwindigkeit der Kanalstrahlen.

Es seien zuerst die für die Berechnung des Intensitätsverhältnisses in Betracht kommenden Formeln gegeben.

Bedeutен  $J_l$  und  $J_k$  die Intensitäten zweier Lichtquellen von nahezu derselben Wellenlänge,  $J_l$  Intensität der langweiligen,  $J_k$  der kurzweiligen Komponente einer Linie,  $S_l$  und  $S_k$  die zugehörigen Schwärzungen und  $m$  eine für die photographische Platte charakteristische Konstante, so gilt nach

J. Stark<sup>1)</sup> bei gleicher Belichtungszeit für normale Schwärzungen die Formel

$$(1) \quad \frac{J_l}{J_k} = e^{\frac{S_l - S_k}{m}},$$

woraus in erster Annäherung

$$\frac{J_l}{J_k} = 1 + \frac{S_l - S_k}{m},$$

in zweiter Annäherung

$$(2) \quad \frac{J_l}{J_k} = 1 + \frac{S_l - S_k}{m} + \frac{1}{2} \left( \frac{S_l - S_k}{m} \right)^2.$$

Die letztere Formel wurde für die Berechnung der in den beifolgenden Tabellen angegebenen Werte des Intensitätsverhältnisses verwendet, außer bei den sehr großen Schwärzungsunterschieden, wo die genauere Formel (1) benutzt wurde.

Zur Bestimmung des Wertes von  $m$  benutzte ich den von J. Stark<sup>1)</sup> angegebenen Kunstgriff mit dem „Doppelfeld“. Es wird vor den Kollimatorspekt eine kleine rechteckige photographische Platte gestellt, deren beide Hälften eine gleichmäßige, aber untereinander verschiedene Schwärzung besitzen. Das durchgegangene Licht wird in den beiden Hälften in einem leicht zu bestimmenden Verhältnis geschwächt, so daß die eine Hälfte der Spektrallinie eine größere Schwärzung als die andere zeigt. Der Schwärzungsunterschied der beiden Hälften sowohl der Spektrallinien als der Doppelplatte wurde mit einem Hartmannschen Mikrophotometer gemessen.

Bedeutet  $S$  die Schwärzung einer entwickelten photographischen Schicht,  $J_1$  die auf die Schicht fallende,  $J_2$  die von ihr durchgelassene Lichtintensität im Photometer, so ist

$$S = \log \frac{J_1}{J_2}.$$

Es ergab sich gemäß dieser Formel, daß die beiden Hälften des „Doppelfeldes“ das Licht in dem Verhältnis 1,479:1 durchließen. Gemäß Formel (1) erhielt ich für die benutzten Agfaplatten als Mittel aus 14 Messungsreihen den

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 35. p. 461. 1911.



Wert  $m = 0,64$ . Dieser Wert ist zugleich das Mittel aus den untereinander nur wenig verschiedenen Werten für  $H_\beta$ ,  $H_\gamma$  und  $H_\delta$ . Für die bei einer Gitteraufnahme benutzte Wellingtonplatte ergab sich  $m = 0,65$ .

Tabelle I.

Linie	Komponentenart	Kathodenfall 2500 Volt		Kathodenfall 7300 Volt		Kathodenfall 2500 Volt		Kathodenfall 7300 Volt	
		Schwärz.	$S_i - S_k$	Schwärz.	$S_i - S_k$	Intens.-Verh. $\frac{S_i - S_k}{J_i - J_k}$	$J_i = e^m$	Intens.-Verh. $\frac{S_i - S_k}{J_i - J_k}$	$J_i = e^m$
$H_\beta$	$p_i$	1,47	0,31	2,17	0,37	1,62	1,78		
	$p_k$	1,16		1,80					
	$s_i$	1,51	0,13	2,24	0,17	1,22	1,30		
	$s_k$	1,38		2,07					
$H_\gamma$	$p_i$	1,42	0,30	2,19	0,38	1,60	1,81		
	$p_k$	1,12		1,81					
	$s_i$	1,37	0,18	2,09	0,22	1,32	1,41		
	$s_k$	1,19		1,07					
$H_\delta$	$p_i$			1,75	0,43		1,96		
	$p_k$			1,32					
	$s_i$			1,23	0,14		1,24		
	$s_k$			1,09					

Die Doppelfeldaufnahmen zur Bestimmung von  $m$  geschahen meist gleich nach der Aufnahme der Serienlinien auf derselben Platte wie jene und zwar wurde durch Variation der Belichtungsdauer dafür gesorgt, daß wenigstens einige der Linien normale Schwärzung besaßen und also ausgemessen werden konnten.

Es wurden bei den Untersuchungen über die Abhängigkeit des Intensitätsverhältnisses von der Kanalstrahlengeschwin-

digkeit zwei verschiedene Feldstärken verwendet. Bei der ersten Versuchsreihe war das zerlegende Feld 18000 Volt  $\times$  cm<sup>-1</sup> und

Tabelle II.

Linie	Komponenten	Kathodenfall 2800 Volt		Kathodenfall 4800 Volt		Kathodenfall 8000 Volt		Kathodenfall 2800 Volt	Kathodenfall 4800 Volt	Kathodenfall 8000 Volt
		$S_1 - S_k$		$S_1 - S_k$		$S_1 - S_k$		$\frac{S_1 - S_k}{J_1 - J_k}$	$\frac{S_1 - S_k}{J_1 - J_k}$	$\frac{S_1 - S_k}{J_1 - J_k}$
		Schwärz.	$S_1 - S_k$	Schwärz.	$S_1 - S_k$	Schwärz.	$S_1 - S_k$	$\frac{S_1 - S_k}{J_1 - J_k}$	$\frac{S_1 - S_k}{J_1 - J_k}$	$\frac{S_1 - S_k}{J_1 - J_k}$
$H_\beta$	$p_i$	1,25	0,20	1,46	0,43	1,60	0,54	1,36	1,96	2,33
	$p_k$	1,05		1,03		1,06				
	$s_i$	1,31	0,11	1,38	0,20	1,60	0,32	1,19	1,36	1,65
	$s_k$	1,20		1,18		1,28				
$H_\gamma$	$p_i$	1,353	0,240	1,47	0,45	1,75	0,61	1,44	2,02	2,59
	$p_k$	1,113		1,02		1,14				
	$s_i$	1,26	0,12	1,24	0,21	1,46	0,33	1,20	1,39	1,68
	$s_k$	1,14		1,03		1,13				
$H_\delta$	$p_i$	1,310	0,243	1,44	0,46	1,78	0,64	1,45	2,05	2,72
	$p_k$	1,067		0,98		1,14				
	$s_i$	1,01	0,03	0,93	0,08	1,05	0,14	1,05	1,13	1,24
	$s_k$	0,98		0,85		0,91				

es wurden zwei Aufnahmen bei 2500 Volt bzw. 7300 Volt Kathodenfall gemacht. Zur Herstellung des Feldes wurde

eine Gleichstromdynamomaschine verwendet, den Kathodenfall lieferten Hochspannungsakkumulatorbatterien. Die Spannungen wurden durch Elektrometer kontrolliert. Die beiden Aufnahmen wurden auf eine und dieselbe Platte gemacht und zwar stets gleichzeitig mit dem Gitter- und mit dem Prismenspektrographen. Die Belichtungsdauer betrug in den beiden Fällen 3 Stunden.

Eine Übersicht über die Resultate gibt vorstehende Tab. I. Die als Schwärzungen angegebenen Zahlen sind die Mittelwerte aus drei an verschiedenen Stellen der Linien gemachten Messungen. Jede Messung wurde dreimal ausgeführt.

Tab. II enthält die Beobachtungen bei drei verschiedenen Kathodenfällen, 2300 Volt, 4800 Volt und 8000 Volt. Die Feldstärke betrug stets  $15000 \text{ Volt} \times \text{cm}^{-1}$ , die Belichtungsdauer bei der kleinsten Geschwindigkeit 5 Stunden, bei den übrigen 4 Stunden. Es wurden wieder gleichzeitig mit den zwei Spektrographen Aufnahmen gemacht.

Man ersieht aus den Tabellen, daß das Intensitätsverhältnis der äußeren Komponenten insbesondere der *p*-Komponenten beträchtlich von Eins verschieden ist. Ferner nimmt es mit wachsendem Kathodenfall, also mit wachsender Geschwindigkeit der Kanalstrahlen zu. Die Zahlen lassen auch erkennen, daß das Intensitätsverhältnis mit wachsender Gliednummer der Wasserstoffserienlinien zunimmt — eine Ausnahme bilden die *s*-Komponenten von  $H_\beta$ .

### § 3. Abhängigkeit des Intensitätsverhältnisses von der Komponentennummer.

Da für die Untersuchung der Abhängigkeit des Intensitätsverhältnisses einer lang- und einer kurzwelligen Komponente gleicher Nummer von der Komponentennummer eine Feinzerlegung der H-Linien nötig war und deshalb sehr starke zerlegende Felder benutzt wurden, andererseits 20—24 Stunden belichtet werden mußte, boten die Aufnahmen bedeutende Schwierigkeiten. Zur Herstellung des Feldes diente die früher erwähnte Dynamomaschine und mehrere in Serien geschaltete Hochspannungsakkumulatorbatterien. Die Kanalstrahlen wurden bei einem konstanten Kathodenfall von etwa 10 000 Volt ent-

weder mit Hilfe einer Influenzmaschine von 20 Platten oder mit einem Induktorium (Rotaxunterbrecher) erzeugt.

Die Tabb. III und IV geben eine Übersicht über die Messungen. Die Numerierung der Komponenten stimmt mit der von J. Stark in seinem Buche „Elektrische Spektralanalyse chemischer Atome“ benutzten überein.

Die Schwärzungen sind wieder die Mittelwerte aus Messungen an drei verschiedenen Stellen der Linien.

Tabelle III.

Kathodenfall durch Influenzmaschine erzeugt.

Feldstärke 74 000 Volt  $\times$  cm<sup>-1</sup>. Belichtungsdauer 20 Stunden.

Linie	Komponentenart	Kompon.-Nummer	Schwärzung	$S_i - S_k$	Intensitätsverh.
					$\frac{J_i}{J_k} = e^{\frac{S_i - S_k}{m}}$
$H_\beta$	p-Kompon.	5 <sub>i</sub>	2,23		
		5 <sub>k</sub>	1,87	0,36	1,76
		4 <sub>i</sub>	1,99		
		4 <sub>k</sub>	1,83	0,16	1,28
		3 <sub>i</sub>	1,30		
		3 <sub>k</sub>	1,27	0,03	1,05
	s-Kompon.	3 <sub>i</sub>	2,05		
		3 <sub>k</sub>	1,05	0,20	1,36
		2 <sub>i</sub>	2,120		
		2 <sub>k</sub>	2,107	0,013	1,22
		1 <sub>i</sub>	1,245		
		1 <sub>k</sub>	1,250	-0,005	1,00
$H_\gamma$	p-Kompon.	6 <sub>i</sub>	2,23		
		6 <sub>k</sub>	1,81	0,42	1,93
		5 <sub>i</sub>	1,79		
		5 <sub>k</sub>	1,61	0,18	1,32
		4 <sub>i</sub>	1,147		
		4 <sub>k</sub>	1,144	0,003	1,00
	s-Kompon.	4 <sub>i</sub>	1,95		
		4 <sub>k</sub>	1,72	0,23	1,42
		3 <sub>i</sub>	1,767		
		3 <sub>k</sub>	1,693	0,074	1,12
		1 <sub>i</sub>	1,563		
		1 <sub>k</sub>	1,493	0,070	1,11

Tabelle IV.

Kathodenfall erzeugt durch Induktorium.  
Feldstärke 120000 Volt  $\times$  cm<sup>-1</sup>. Belichtungsdauer 24 Stunden.

Linie	Komponentenart	Kompon.- Nummer	Schwärzung	$S_i - S_k$	Intensitätsverh.
					$\frac{J_i}{J_k} = e^{\frac{S_i - S_k}{m}}$
$H_\beta$	p-Kompon.	5 <sub>i</sub>	1,47	0,37	1,77 <sup>1)</sup>
		5 <sub>k</sub>	1,10		
		4 <sub>i</sub>	1,34	0,24	1,44
		4 <sub>k</sub>	1,10		
		3 <sub>i</sub>	0,883	0,016	1,02
		3 <sub>k</sub>	0,867		
	s-Kompon.	3 <sub>i</sub>	1,46	0,28	1,54
		3 <sub>k</sub>	1,18		
		2 <sub>i</sub>	1,60	0,08	1,13
		2 <sub>k</sub>	1,52		
		1 <sub>i</sub>	0,843	0,07	1,11
		1 <sub>k</sub>	0,837		
$H_\gamma$	p-Kompon.	2 <sub>i</sub> <sup>2)</sup>	1,96	0,06	1,10
		2 <sub>k</sub>	1,90		
		1 <sub>i</sub>	1,97	-0,02	0,97
		1 <sub>k</sub>	1,99		
	s-Kompon.	4 <sub>i</sub>	1,13	0,29	1,59
		4 <sub>k</sub>	0,84		
		3 <sub>i</sub>	0,94	0,04	1,06
		3 <sub>k</sub>	0,90		
		1 <sub>i</sub>	0,89	0,02	1,03
		1 <sub>k</sub>	0,87		

Die Zahlen der Tab. III und IV lassen deutlich erkennen, daß das Intensitätsverhältnis einer lang- zu einer kurzwelligen Komponente gleicher Nummer von außen nach innen in dem Komponentensystem abnimmt und sich der Grenze Eins nähert. Dieses Gesetz gilt sowohl für die p- wie die s-Komponenten.

1) Wellingtonplatte ( $m = 0,65$ ).

2) Die anderen p-Komponenten waren auf der Gitteraufnahme zu schwach, auf der Aufnahme mit dem Prismenspektrographen zu intensiv um ausgemessen werden zu können.

Die Messungen haben zwar in zwei Fällen einen unbedeutenden Schwärzungsüberschuß zugunsten einer inneren kurzwelligen Komponente ergeben, doch liegt diese Abweichung bei der geringen Intensität der mittleren Komponenten innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler.

#### § 4. Resultate.

Das Intensitätsverhältnis der äußeren lang- und kurzwelligen elektrischen Komponenten gleicher Nummer ist bei den Serienlinien des Wasserstoffs erheblich größer als Eins; es wurde in einigen Fällen gleich 2 bis 2,7 gefunden. Dieses Intensitätsverhältnis ist abhängig von dem Kathodenfall, also von der Geschwindigkeit der Kanalstrahlen und zwar nimmt es mit wachsender Geschwindigkeit zu. Diesem Gesetz folgen sowohl die  $p$ - wie die  $s$ -Komponenten.

Innerhalb der Serie scheint mit wachsender Gliednummer das Intensitätsverhältnis zuzunehmen (Ausnahme die  $s$ -Komponenten bei  $H_\beta$ ).

Das Intensitätsverhältnis einer lang- und einer kurzwelligen Komponente gleicher Nummer nimmt sowohl bei den  $p$ - wie  $s$ -Komponenten nach innen, also mit sinkender Komponentennummer ab und nähert sich bei Annäherung an die Frequenz der unzerlegten Linie dem Werte Eins.

Am Schlusse dieser Mitteilung sei es mir gestattet, Hrn. Prof. J. Stark für die freundliche Anregung und Unterstützung der vorliegenden Untersuchung meinen besten Dank auszusprechen. Auch den Assistenten des Physikalischen Instituts, Hrn. Dr. G. Wendt und Hrn. Dr. H. Kirschbaum bin ich zum Dank verpflichtet.

Aachen, Physikal. Institut der Technischen Hochschule,  
10. Juli 1914.

(Eingegangen 13. Juli 1914.)

#### 4. Die träge Masse schnell bewegter Elektronen; von Günther Neumann.

(Auszug aus der gleichnamigen Breslauer Dissertation.)

(Hierzu Tafel IV.)

##### § 1. Einleitung.

Im Jahre 1909 veröffentlichte A. H. Bucherer eine Arbeit: Die experimentelle Bestätigung des Relativitätsprinzips.<sup>1)</sup> Er bestimmte darin die spezifische Ladung  $e/m$  des Elektrons als Funktion seiner Geschwindigkeit an den  $\beta$ -Strahlen eines Radiumfluoridkörnchens. Berechnet man  $e/m_0$  aus den Versuchen nach der Abrahamschen oder Lorentz-Einsteinschen Theorie, so müssen sich nach beiden verschiedene Werte ergeben. Diejenige Theorie ist die richtige, bei der  $e/m_0$  sich als unabhängig von der Geschwindigkeit erweist. Seine Messungen entschieden für die Lorentzsche Theorie.

An die Arbeit knüpfte sich eine längere Polemik mit A. Bestelmeyer<sup>2)</sup>, in der letzterer verschiedene Einwände machte. Es bleiben zwei Punkte zu erörtern. Bestelmeyer sagt<sup>3)</sup>: „Es ist zum mindesten fraglich, ob überhaupt die Versuche eines einzigen Forschers mit einem einzigen Apparat ausreichen können, eine so wichtige Frage, wie die der Grundlagen der Theorie der Elektrizität und vielleicht selbst der Mechanik, definitiv zu entscheiden. Jedenfalls aber scheint mir in einem solchen Falle einerseits eine detaillierte Angabe aller Messungen und Beobachtungsprotokolle, andererseits eine ausführliche Besprechung aller Fehlerquellen nötig.“ Des

1) A. H. Bucherer, Ann. d. Phys. 28. p. 513. 1909 und Phys. Zeitschr. 9. p. 755. 1908.

2) Vgl. A. Bestelmeyer, Ann. d. Phys. 30. p. 166. 1909 und 32. p. 231. 1910, sowie A. H. Bucherer, Ann. d. Phys. 30. p. 974. 1909.

3) A. Bestelmeyer, Ann. d. Phys. 30. p. 167. 1909.

weiteren vertritt Bestelmeyer<sup>1)</sup> die Ansicht, daß die maximale Schwärzung bei den photographisch fixierten  $\beta$ -Strahlenkurven Bucherers vielleicht nicht von den  $\beta$ -Strahlen desjenigen Geschwindigkeitsbereiches herrührt, für den der Versuch berechnet ist, von den sogenannten „kompensierten“ Strahlen, sondern von  $\beta$ -Strahlen benachbarter Geschwindigkeitsbereiche, die auch noch die photographische Platte treffen. Er faßt seine Forderungen in dem Schlußsatze zusammen<sup>2)</sup>:

„Ein Beweis durch Bestimmung der Geschwindigkeitsfunktion der Elektronenmasse aber hat eine große Anzahl von Versuchen, eine engere Auswahl der im einzelnen Versuch registrierten Geschwindigkeiten und ausführliche protokollarische Veröffentlichung mit eingehender Fehlerdiskussion zur Voraussetzung.“

Diese Bemerkungen haben den Anlaß zu vorliegender Arbeit gegeben. Es hatte zunächst K. Wolz<sup>3)</sup> unter Bucherers Leitung ein etwas modifiziertes Verfahren benutzt, um  $e/m_0$  möglichst genau zu bestimmen. Er setzte die Ergebnisse der Buchererschen Arbeit als zu Recht bestehend voraus und berechnete  $e/m_0$  nur nach der Lorentz-Einsteinschen Theorie; in dem von ihm benutzten Geschwindigkeitsbereich  $\beta = 0,5$  bis  $\beta = 0,7$  ergab sich dabei Konstanz der spezifischen Ladung. Auf eine Untersuchung der Werte, die sich aus seinen Versuchen nach der Abrahamschen Theorie ergaben, ging er indessen nicht ein.

Hr. Prof. Bucherer war so liebenswürdig, mir die von ihm und Wolz benutzten Apparate zu meinen Versuchen zur Verfügung zu stellen. Zu besonderem Danke bin ich Hrn. Prof. Bucherer noch dafür verpflichtet, daß er mir in entgegenkommender Weise ein Radiumfluoridpräparat lieh.

Der wichtigste, in der Methode selbst liegende Streitpunkt, die Frage der nichtkompensierten Strahlen, wird in § 8, Ziff. 3 dieser Arbeit untersucht werden. Die Bemerkungen Bestelmeyers über Protokolle und Fehlerangaben sollen im folgenden weitmöglichst berücksichtigt werden.

1) A. Bestelmeyer, l. c. p. 169 ff.

2) A. Bestelmeyer, l. c. p. 174.

3) Kurt Wolz, Die Bestimmung von  $e/m_0$ . Ann. d. Phys. 30. p. 373. 1909.



Der Gang der Arbeit war der, daß zunächst bei den mir geliehenen Apparaten die Apparatkonstanten zur Kontrolle neu bestimmt und einige Aufnahmen zur Orientierung gemacht wurden. Die dabei gesammelten Erfahrungen gaben Veranlassung, einen Teil der Apparatur umzuändern oder zu erneuern. Dann wurde eine größere Anzahl von Messungen ausgeführt, deren Resultate das endgültige Ergebnis der Arbeit darstellen.

Ein kurzer Bericht über diese Arbeit und ihr Ergebnis ist von Hrn. Prof. Dr. C. Schaefer auf der 85. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte zu Wien erstattet worden.<sup>1)</sup>

## § 2. Methode der Versuche.

Obwohl im Prinzip die Bucherer-Wolz'sche Methode beibehalten wurde — von Wolz' Versuchsanordnung wurde nur dort abgewichen, wo die Rücksicht auf eine bessere experimentelle Ausführbarkeit es wünschenswert erscheinen ließ —, seien doch der Übersichtlichkeit halber nochmals kurz die theoretischen Grundlagen angegeben.

Die  $\beta$ -Strahlung eines Radiumfluoridkörnchens passiert das elektrische Feld eines aus zwei versilberten Glasplatten bestehenden Kondensators. Dieser befindet sich in einem homogenen Magnetfelde, derart, daß die längs der Kondensatorlängsachse verlaufenden Strahlen, die elektrischen und die magnetischen Kraftlinien aufeinander senkrecht stehen, wie die Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Sei  $e$  die Ladung eines Elektrons der  $\beta$ -Strahlung,  $E$  das elektrische,  $H$  das magnetische Feld,  $u$  die Geschwindigkeit des Elektrons, so ist die elektrostatische, auf das Elektron ausgeübte Kraft  $eE$ , die elektrodynamische  $e \cdot H \cdot u$ . Wenn der Richtungssinn der Felder passend gewählt ist, so wirken beide entgegengesetzt ablenkend auf das Elektron, die resultierende Kraft ist

$$(1) \quad F = eE - eHu,$$

und die Strahlen werden nach der einen oder anderen Seite

1) C. Schaefer, Die träge Masse schnell bewegter Elektronen. Verh. d. Deutsch. phys. Ges. 15. p. 985. 1913; auch Phys. Zeitschr. 14. p. 1117. 1913.

abgelenkt, je nachdem der erste oder zweite Summand größer ist. Es pflanzt sich nur die Strahlung geradlinig fort, für die

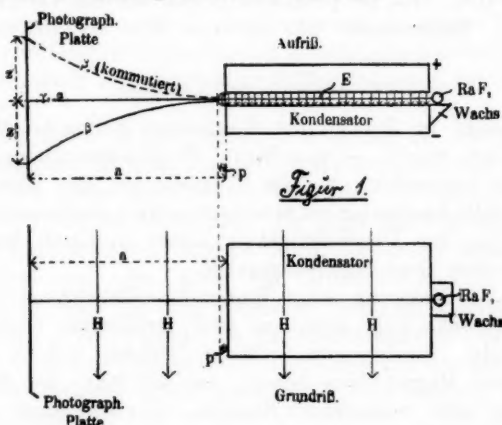
$$(2) \quad e H = e H u$$

oder

$$(3) \quad \frac{u}{c} = \beta = \frac{E}{H \cdot c}$$

ist ( $c$  Lichtgeschwindigkeit).

Die dieser Gleichung gehorchenden Strahlen sind die weiter oben als „kompensierte“ bezeichneten.



Nach Verlassen des elektrischen Feldes befinden sich die kompensierten Strahlen unter der alleinigen ablenkenden Wirkung des Magnetfeldes, und man bestimmt die Ablenkung, indem man sie mittels einer photographischen Platte fixiert, deren Schicht parallel zum Kondensatorrand und senkrecht zur Richtung der unabgelenkten Strahlen orientiert ist.

Die Anordnung ist in Fig. 1 schematisch dargestellt. Hierin ist der Abstand der Platte vom Kondensator mit  $a$  bezeichnet, die Ablenkung der  $\beta$ -Strahlung von der durch die  $\gamma$ - und  $\alpha$ -Strahlung repräsentierten ursprünglichen Richtung mit  $z$ .

Aus den Feldgrößen, sowie  $a$  und  $z$  berechnet Bucherer mit Hilfe der Lorentz-Einsteinschen Relativitätstheorie (l. c p. 520):

$$(4) \quad \frac{e}{m_0} = \frac{2ex}{[a^2 + x^2]H} \tan(\arcsin \beta).$$

Bei Zugrundelegung der Abrahamschen Theorie des starren Elektrons dagegen erhält er:

$$(5) \quad \frac{e}{m_0} = \frac{2ex}{[a^2 + x^2]H} \left\{ \frac{3}{4\beta} \frac{2\delta - \text{Tang } 2\delta}{\text{Tang } 2\delta} \right\},$$

wenn  $\text{Tang } \delta = \beta$  ist.

Diese Formeln wären ohne weiteres anwendbar und könnten damit zu einer Entscheidung zwischen den beiden Theorien dienen — die richtige Theorie muß Unabhängigkeit des Wertes für  $e/m_0$  von  $\beta$  ergeben — wenn der Weg  $a$  der Elektronen im Magnetfelde allein wirklich gleich dem Abstände des Kondensatorrandes von der photographischen Platte wäre. Es findet indessen an den Kondensatorrändern eine Kraftlinienstreuung statt, deren Wirkung in erster Annäherung<sup>1)</sup> so ist, als ob das Feld um ein Stück  $p$  homogen weiter verlief und dann sprunghaft auf 0 absänke; d. h. der Weg im freien Magnetfelde ist nur  $a - p$ , so daß in (4) und (5) an Stelle von  $a$  die Größe  $(a - p)$  zu setzen ist. Um  $p$  zu bestimmen ist dann notwendig, einen zweiten Versuch unter denselben Versuchsbedingungen, nur mit verändertem  $a$ , zu machen, und man erhält dann statt (4) folgendes Gleichungspaar zur Bestimmung der beiden Unbekannten  $\left(\frac{e}{m}\right)_0$  und  $p$ :

$$\begin{aligned} (4a) \quad & \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{e}{m_0}\right) &= \frac{2ex_1}{[(a_1 - p)^2 + x_1^2]H} \tan(\arcsin \beta) \\ \left(\frac{e}{m_0}\right) &= \frac{2ex_2}{[(a_2 - p)^2 + x_2^2]H} \tan(\arcsin \beta) \end{aligned} \right. \\ \text{nach} & \\ \text{Lorentz} & \end{aligned}$$

Ganz analog sehen die nach der Abrahamschen Theorie entwickelten Formeln aus:

$$\begin{aligned} (5a) \quad & \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{e}{m_0}\right) &= \frac{2ex_1}{[(a_1 - p)^2 + x_1^2]H} \left\{ \frac{3}{4\beta} \frac{2\delta - \text{Tang } 2\delta}{\text{Tang } 2\delta} \right\} \\ \left(\frac{e}{m_0}\right) &= \frac{2ex_2}{[(a_2 - p)^2 + x_2^2]H} \left\{ \frac{3}{4\beta} \frac{2\delta - \text{Tang } 2\delta}{\text{Tang } 2\delta} \right\} \end{aligned} \right. \\ \text{nach} & \\ \text{Abraham} & \end{aligned}$$

Für  $p$  ergibt sich aus (4a) und (5a) in Übereinstimmung:

1) Vgl. A. H. Bucherer, l. c. p. 522.

$$(6) \quad p = \frac{\alpha a_2 - a_1}{\alpha - 1} (\pm) \sqrt{\left(\frac{\alpha a_2 - a_1}{\alpha - 1}\right)^2 + \frac{a_1^2 + z_1^2}{\alpha - 1} - \frac{\alpha (a_2^2 + z_2^2)}{\alpha - 1}},$$

wo  $\alpha = z_1/z_2$  ist.

Das  $+$ -Zeichen in Gleichung (6) ist eingeklammert, weil die mit dem positiven Wurzelwert gebildeten Ausdrücke keinen physikalischen Sinn ergeben.

In praxi läßt sich die oben gestellte Forderung der Innehaltung derselben Versuchsbedingungen unter alleiniger Änderung von  $\alpha$  nicht durchführen, infolgedessen bekommt der Faktor  $\alpha$  für beide Theorien verschiedene Bedeutung:

$$(7) \quad \begin{array}{l} \text{Relativtheorie} \\ \text{(Lorentz)} \end{array} \quad \alpha = \frac{z_1 \Phi_2 \operatorname{tg}(\arcsin \beta_1)}{z_2 \Phi_1 \operatorname{tg}(\arcsin \beta_2)}$$

$$(8) \quad \begin{array}{l} \text{Kugeltheorie} \\ \text{(Abraham)} \end{array} \quad \alpha = \frac{z_1 \Phi_2 \left\{ \frac{3}{4} \frac{2\delta_1 - \operatorname{tg} 2\delta_1}{\beta_1} \right\}}{z_2 \Phi_1 \left\{ \frac{3}{4} \frac{2\delta_2 - \operatorname{tg} 2\delta_2}{\beta_2} \right\}},$$

wobei, wie oben gesagt,  $\beta = \operatorname{tg} \delta$  ist.

Alle Versuchspaare müssen theoretisch denselben Wert von  $p$  ergeben, da  $p$  ja den Charakter einer geometrischen Größe, gewissermaßen einer Apparatkonstanten hat, und zwar unabhängig davon, ob es nach der Lorentzschen oder Abrahamschen Theorie berechnet wird; da aber zur Bestimmung von  $p$  zwei Versuche notwendig sind, und man es natürlich nicht erreichen kann, das magnetische und elektrische Feld bei beiden absolut identisch zu machen (d. h. da man immer zwei etwas verschiedene Geschwindigkeiten  $\beta_1$  und  $\beta_2$  hat), so gehen also in  $p$  erstens die Differenzen der beiden Theorien, zweitens die Versuchsfehler ein. Tatsächlich weisen daher die verschiedenen  $p$ -Werte Differenzen auf. Um vergleichbare Resultate zu erhalten, muß man das Mittel aus allen  $p$ -Werten zur Berechnung benutzen. Es wird auf diesen Punkt in § 8 noch näher eingegangen werden.

### § 3. Das elektrische Feld.

Der Kondensator bestand, wie schon angedeutet, aus zwei versilberten rechteckigen Glasplatten, deren Abstand voneinander durch vier an den Ecken dazwischen gelegte planparallele Quarzplättchen fixiert war. Es wurden dabei nicht

die von Wolz benutzten Kondensatorplatten verwendet, denn bei ihnen waren die Stirnflächen matt geschliffen, so daß es nicht möglich war, den hier bei der Versilberung niedergeschlagenen Überzug nachträglich zu entfernen, wie ich beabsichtigte, um die Randstreuung und damit die  $p$ -Korrektur auf ein Minimum herabzudrücken. Ich ließ daher zwei neue optisch ebene Platten anfertigen, bei denen sämtliche Flächen poliert waren. Die Platten hatten folgende Dimensionen:

Länge	5,0 cm	} rund.
Höhe	0,5 „	
Breite	3,0 „	

Sie wurden auf ihre Güte mit dem Abbé-Fizeauschen Interferenzapparat zur Prüfung planparalleler Platten untersucht. Die Versilberung befand sich auf der einen der beiden planen Flächen, mit deren Rand sie scharf abschnitt. Nur an einer von der photographischen Platte abgekehrten Ecke führte ein etwa 0,5 cm breiter Silberstreifen über die Stirnfläche weg bis auf die Rückseite der Platte, wo die Spannung zugeführt wurde. Die Versilberung wurde mehrfach erneuert; bei den anfänglichen Versuchen stellte ich sie selbst her, später ließ ich sie von der Firma J. D. Möller, Wedel in Holstein, ausführen.

Die von Bucherer und Wolz benutzten Quarzplättchen (in Kreisform, 0,5 cm Durchmesser), die den Abstand der Kondensatorplatten voneinander fixieren, waren nach einer Mitteilung Bucherers nicht mehr brauchbar, da sie längere Zeit in der Nähe des Radiumpräparates gelegen hatten und dadurch leitend geworden waren. Hr. Prof. Bucherer übersandte mir daher vier neue Plättchen, die er mir nebst den alten freundlichst zur Verfügung stellte.

Zu ihrer Dickenmessung wurde ein Zeiss'scher Tiefentaster verwendet, dessen Silberskala von der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt zweimal geeicht war. Zunächst wurden die alten Plättchen zur Kontrolle der Meßmethode nachgemessen. Je 50 Messungen der drei Plättchen — eins war inzwischen beschädigt worden — ergaben die Dicke 0,25071 mm, während Bucherer nach anderer Methode<sup>1)</sup> ge-

1) A. H. Bucherer, l. c. p. 517.

messen hatte: 0,25075 mm und Wolz 0,25048 mm. Die Übereinstimmung ist also recht gut. Darauf wurden die neuen Plättchen, die ebenfalls Kreisform und 0,5 cm Durchmesser hatten, gemessen. Mit jedem Plättchen wurden 50 Messungen vorgenommen, woraus sich als Mittel die Dicke

$$d = 0,2510 \text{ mm}$$

ergab. Eine Kontrollmessung am Ende der Versuche ergab

$$d = 0,2512 \text{ mm},$$

also im Mittel:

$$d = 0,2511 \text{ mm } (\pm 0,5 \text{ Promille}).$$

Zum Zusammensetzen des Kondensators wurde der schon von Wolz l. c. (p. 282 und Fig. 5a und b) beschriebene Apparat verwendet, eine Grundplatte mit sechs Säulen, zwischen die die Kondensatorplatten genau passen.



Fig. 2.

Es zeigte sich jedoch, daß die Säulen, zwischen die die Kondensatorplatten

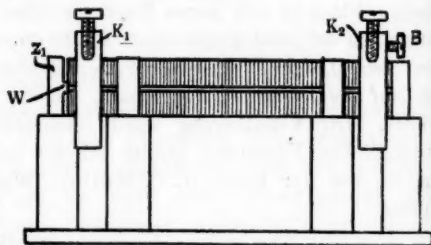


Fig. 3.

gelegt wurden, nicht mehr genau senkrecht zur Grundplatte standen, so daß die Ränder der Platten bei *W* nicht mehr übereinander lagen, wie in Fig. 2 übertrieben gezeichnet ist. Da es aber gerade darauf ankommt, daß diejenigen Ränder der Kondensatorbelegungen, bei denen die kompensierten Strahlen austreten, möglichst genau übereinander liegen — nur dann ist der Abstand *a* zwischen Kondensator und photographischer Platte exakt zu bestimmen —, so wurde das Gestell gemäß Fig. 3 verändert. Der Zapfen *z*<sub>1</sub> der einen Querseite wurde so angefeilt, daß nur an der Stelle *W* ein kleiner Wulst stehen blieb. Gegen ihn legten sich die Platten mit den versilberten Seiten genau an, zumal sie vom gegenüberliegenden Ende mit kleinen Keilen vorsichtig dagegengepreßt wurden.

Die vier Quarzplättchen wurden aufs sorgfältigste gereinigt und unter vorsichtigster Fernhaltung von Staub auf ihren Platz gebracht. Dann wurden vier Klemmen  $K_1$  und  $K_2$  — in der Fig. 3 sind die beiden rückwärtigen verdeckt —, deren U-förmige Gestalt auf Fig. 4 (hier mit  $kl$  bezeichnet) deutlich zu erkennen ist, genau über den Quarzplättchen aufgesetzt und gleichmäßig fest angezogen. Die beiden Klemmen  $K_2$  trugen seitlich kleine Schraubchen  $B$  zum Anlegen der Spannung.

Die Klemmen waren mit Glimmer überall sorgfältigst von den Kondensatorplatten isoliert, ausgenommen die zwei Klemmen  $K_3$ , die mit je einer der Zuleitungszungen in leitender Verbindung waren. Isolationsmessungen, die nach jeder Neuzusammensetzung, sowie zwischendurch, vorgenommen wurden, ergaben den Widerstand des Kondensators zwischen  $10^{11}$  und  $10^{12}$  Ohm. Er sank im Laufe der Versuche durch die Wirkung der Radiumstrahlung etwas, indessen wurde er nicht geringer als  $10^{10}$  Ohm.

Die Justierung des Kondensators gegen die photographische Platte wurde in dem von Wolz benutzten Messinggehäuse ausgeführt; es besteht im Prinzip aus zwei ineinander verschiebbaren Messingrohren, mit deren einem der Kondensator starr verbunden ist, während das andere die photographische Platte trägt. Bezüglich der Details sei auf die von Wolz l. c. p. 277 u. Fig. 1 verwiesen. Jedoch wurden einige Veränderungen vorgenommen, die sich als zweckmäßig herausstellten. So wurde der dort mit  $b$  bezeichnete Kondensatorfuß abgeändert, so daß der Kondensator genauer gegen die photographische Platte zu orientieren war. Auch wurde an Stelle der Feder  $f$ , die die photographische Platte festhält, von Aufnahme 37 an eine solche verwendet, die gegen die Platte nicht in der Mitte, sondern an den Rändern drückt, wodurch ein Durchbiegen der Platte völlig ausgeschlossen war.

Schließlich wurde das Diaphragma  $d$  durch ein anderes aus Siegellack ersetzt, das eine rechteckige Öffnung von  $3 \times 0,3$  cm hatte; über seinen Zweck wird noch unten § 8, 2 gesprochen werden.

Die Ausmessung des Abstandes  $a$  zwischen Kondensator-

rand und photographischer Platte fand auf einer mittels Normalmeters geeichten Teilmaschine statt.

Das Messinggehäuse wurde zur Messung von  $a$  in ein passendes Gestell mit verstellbaren Fußschrauben gelegt, so daß seine Längsachse parallel der Schraubenspindel der Teilmaschine ausgerichtet werden konnte. Zum Messen wurde eine in Höhe des Kondensatorspaltes durchschnittene photographische Platte bei  $p$  eingesetzt, so daß also der Kondensatorrand und der Rand der photographischen Platte in ein und derselben Einstellebene des Beobachtungsmikroskops lagen. Späterhin von Aufnahme 26 an, wurde an Stelle der Glasplatte eine sorgfältig eben geschliffene Messingplatte benutzt, die ein genaueres Einstellen ermöglichte; sie war von der Größe der photographischen Platten und hatte einen 1,5 cm breiten Ausschnitt in U-Form, dessen horizontale Kante genau in gleicher Höhe und parallel mit dem Kondensatorspalt verlief; auf diese Kante wurde eingestellt. Beim Anvisieren des Kondensatorrandes zeigte es sich, daß ein genaues Einstellen auf ihn nicht möglich war, infolge der an den verschiedenen Glasflächen auftretenden Lichtreflexe. Dem konnte indessen dadurch abgeholfen werden, daß ein Stückchen Klebewachs als Marke auf die Stirnfläche dicht unter den Kondensatorspalt geklebt wurde.

Die Genauigkeit, mit der  $a$  gemessen wurde, war bei der Verwendung der Messingplatte eine recht gute. Der mittlere Fehler konnte durch wenige Einstellungen auf ein bis zwei Zehntel Promille herabgedrückt werden. Bei Verwendung der Glasplatte statt der Messingplatte war die Genauigkeit geringer.

Da die photographischen Aufnahmen in möglichst hohem Vakuum vorgenommen werden mußten, wurde der ganze Apparat in ein Glasgefäß eingesetzt, wie es Fig. 4 zeigt. Die Lage des Messinggehäuses wird dabei durch sechs Messingstützen fixiert, die in zwei Kränzen zu je dreien an seinen Enden angeordnet sind. Die beiden nach oben weisenden Zapfen federn etwas, damit die Glaswandung beim Einsetzen nicht zersprengt wird. Die Ebene des Kondensators ist parallel zur Oberfläche des Fußbrettes  $F$  orientiert, seine Stirnfläche ist parallel zu der nach vorn gekehrten Kante  $k$  des Fußbrettes, die gegen die Längswandung des Solenoids mittels



zweier Federn gepreßt wird und so als Führung dient. Die Justierung wurde auf der Anreißplatte mit dem Höhenreißer und mit geeigneten Schablonen nachgeprüft. Die beiden in der Figur mit *H* bezeichneten Kreissegmente wurden erst später angebracht; ihr Zweck wird weiter unten angegeben werden. Durch diese ganze, sorgfältig ausgeführte Justierung

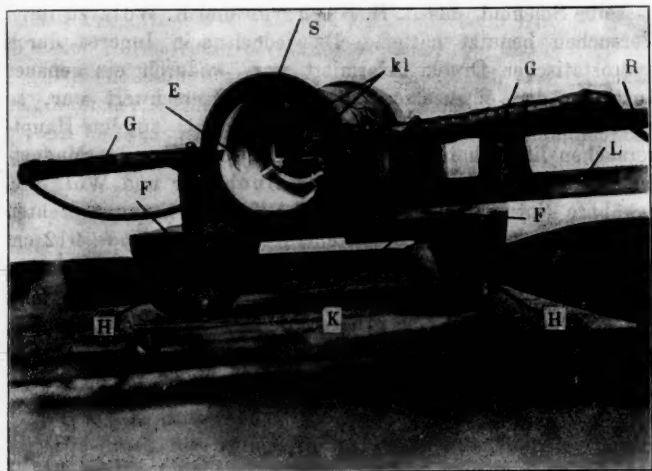


Fig. 4.

ist also erreicht, daß erstens die Solenoidachse durch die Kondensatorebene läuft, und zweitens die Achse des Messinggehäuses senkrecht zur Solenoidachse steht, d. h. senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien. In die beiden Glasstutzen *G* sind zwei Spiralfedern eingeschmolzen, die Elektroden *E*. Nachdem das Gehäuse mit dem die photographische Platte tragenden Ende in das Glasgefäß eingeführt ist, bis es sich gegen die nur wenig gewölbte Hinterwand desselben legt, können die Elektroden mittels Pinzette aus den Ansätzen *G* herausgezogen und an die Klemmen *Kl* des Kondensators angelegt werden. Verschlossen wird das Gefäß durch eine sorgfältig auf *S* aufgeschliffene schwarze Glasplatte von 0,5 cm Dicke. Das Rohr *R* führt zur Luftpumpe, der Holzstiel *L* dient als

Handgriff beim Einschieben des Apparates ins Solenoid. Um Licht von außen fernzuhalten, sind alle Glaswände mit einem lichtdichten Überzug versehen.

#### § 4. Das Magnetfeld von Bucherer und Wolz.

Zur Erzeugung des magnetischen Feldes diente zunächst dasselbe Solenoid, das A. H. Bucherer und K. Wolz zu ihren Versuchen benutzt hatten. Da jedoch sein Inneres durch hydrostatischen Druck deformiert war, wodurch ein genaues Justieren der einzusetzenden Apparatur erschwert war, so wurde es nur zu den Vormessungen benutzt; zu den Hauptversuchen ließ ich in ein neues herstellen. Um das Magnetfeld zu bestimmen, wurde die von Bucherer und Wolz l. c. erwähnte Normalspule verwendet: Auf einen genau gedrehten Marmorring von  $R = 20,635$  cm Radius und  $2b = 4,12$  cm Breite waren  $n = 136$  Windungen emaillierten Kupferdrahtes von 0,3 mm Stärke in einer Lage aufgewickelt. Daraus folgt der mittlere Radius der Drahtwindungen  $R_m = 20,650$  cm; nach der bekannten Formel:

$$H_m = \frac{2 \pi n}{\sqrt{R_m^2 + b^2}} \cdot i$$

ergibt sich dann das Feld im Achsenmittelpunkt:  $H_m = 4,1177$  Gauss für den Strom eine elektromagnetische Einheit. Bucherer und Wolz geben den Wert zu 4,1205 an; wie eine Nachprüfung der Rechnung zeigte, hatten sie versehentlich die Drahtdicke bei der Feldberechnung vernachlässigt. Infolgedessen ändert sich der von ihnen angegebene Absolutwert von  $e/m_0$  etwas; es ergibt sich

der Wert von Bucherer:  $\left(\frac{e}{m_0}\right)^{\text{Lor.}} = 1,766,$

der von Wolz:  $\left(\frac{e}{m^0}\right)^{\text{Lor.}} = 1,7706.$

Die von Bucherer erhaltenen Ergebnisse über die Gültigkeit der Lorentz-Einsteinschen oder der Abrahamschen Theorie werden durch diese Korrektur in keiner Weise beeinflusst.

Mit dieser Normalspule wurde das Feld des großen Solenoids ausgemessen. Die Normalspule wurde über das Solenoid geschoben und so justiert, daß die Achsen und deren Mittelpunkte zusammenfielen. Dann wurden durch beide Spulen Ströme geschickt, die in ihnen entgegengesetzt gerichtete Felder erzeugten. Die Ströme wurden so lange variiert, bis die Felder sich kompensierten. Dann konnte aus einer einfachen Proportion das Feld des Solenoids beim Strom  $I$  aus dem der Normalspule berechnet werden.

Als Indikator der Kompensation diente ein kleiner, hochempfindlicher Magnetometer mit Spiegelablesung. Das Magnetsystem bestand aus fünf nur 2 mm langen Stahlmagnetchen, die auf einem möglichst kleinen Raum übereinander angeordnet waren.

Das Magnetometer wurde im Innern des Solenoids auf einer Millimeterpapierskala verschoben, die auf eine in dasselbe eingebaute Glasplatte geklebt war. Es wurde zunächst so aufgestellt, daß die Magnete sich genau im Mittelpunkt der Solenoidachse befanden; letztere war durch kreuzweise über die Endquerschnitte des Rahmens gespannte Fäden markiert. Die Stellung des Spiegels wurde mittels Fernrohr und Skala aus etwa 3 m Entfernung abgelesen.

Die durch die beiden Spulen geschickten Ströme wurden mittels zweier Milliampereometer gemessen. Die Messungen waren recht mühsam, da das Magnetsystem durch mechanische Erschütterungen und magnetische Störungen selbst in großer Entfernung vom Physikalischen Institut vorbeifahrender Straßenbahnen dauernde Schwankungen um die Nullage ausführte. Die Messungen wurden daher nachts vorgenommen, in der Zeit, in der die Straßenbahnen nicht fuhren.

Bevor an die eigentliche Auswertung des Feldes gegangen werden konnte, mußte festgestellt werden, ob auch wirklich das Magnetsystem im Mittelpunkt der Normalspule war, wenn es sich im Mittelpunkte des Solenoids befand. Gegen das letztere war es mit Hilfe der oben erwähnten Millimeterpapierskala leicht zu orientieren, dagegen nicht gegen die Normalspule, die auf einer, auf den Experimentiertisch gezeichneten Skala verschoben wurde. Berechnet man die Feldstärken der Normalspule längs deren Achse, so findet man

eine sehr schnelle Abnahme beim Herausgehen aus dem Achsenmittelpunkt, wie aus der im Vergleich zum Radius sehr kleinen Länge erklärlich wird. Geht man dagegen vom Mittelpunkt aus seitlich im mittleren Querschnitt weiter, so zeigt sich eine viel geringere Feldänderung. In dieser Richtung verursachte also eine Abweichung von der wirklichen „Nullstellung“ selbst um einige Millimeter keinen merklichen Fehler. Um die richtige Stellung in Richtung der Achse zu ermitteln, wurde folgendermaßen vorgegangen: Das Magnetometer wurde genau in den Mittelpunkt des Solenoids gestellt. Dann wurde eine Meßreihe ausgeführt, indem die Normalspule zentimeterweise von der „Nullstellung“ aus nach beiden Seiten in der Achsenrichtung verschoben wurde. Es werden also immer schwächere Feldpunkte der Normalspule mit dem Felde im Mittelpunkt des Solenoids zur Kompensation zu bringen sein, d. h. je weiter man aus dem Mittelpunkt herausrückt, um so stärkere Ströme müssen durch die Normalspule geschickt werden, um Kompensation der Felder zu erzielen. Macht man nun umgekehrt die Fiktion, daß das Feld der Normalspule längs der ganzen Achse konstant ist, so berechnet sich bei der angedeuteten Messungsreihe für jede Stellung der Normalspule ein anderes Feld im Mittelpunkt des Solenoids, und zwar ergibt sich dies um so größer, je weiter jene aus der wirklichen „Nullstellung“ entfernt ist. Die Kurve der erhaltenen Werte zeigte also bei der wirklichen Koinzidenz der beiden Spulenmittelpunkte ein Minimum, wodurch die richtige „Nullstellung“ der Normale bis auf einen Fehler von 1 mm ermittelt werden konnte.

Nach dieser Feststellung wurde der Feldverlauf in der Achse des Solenoids ermittelt. Normalspule und Magnetometer wurden im gleichen Sinne zentimeterweise auf der Achse verschoben und die Kompensationsströme abgelesen. Drei Meßreihen ergaben im Mittel die in Fig. 5 dargestellte, ganz ausgezogene Kurve. Die Feldstärke im Mittelpunkt wurde dabei durch Häufung der Beobachtungen besonders genau bestimmt; sie ergab sich:  $H_m = 22,73 \cdot J$  ( $J$  in Amp. gemessen) mit einem mittleren Fehler von  $\frac{1}{2}$  Promille. Nach den Seiten hin weist die Kurve merkliche Asymmetrie auf, selbst wenn man von den aufgelagerten Schwankungen absieht. Der wahr-

scheinliche Feldverlauf ist durch die gerissene Kurve dargestellt, da es immerhin bei der Schwierigkeit der Justierung möglich ist, daß die kleineren Schwankungen auf Messungsfehlern beruhen.

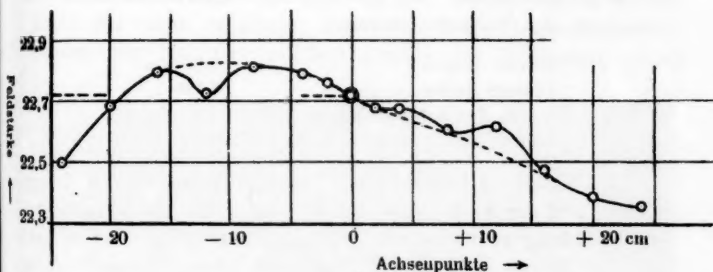


Fig. 5.

Unerklärlich war indessen die große Abweichung meines Wertes von dem durch Bucherer und Wolz ermittelten:

Bucherer:  $23,193 \cdot J$ .

Wolz:  $23,161 \cdot J$ .

Bei näherer Untersuchung stellt sich indessen die Fehlerquelle heraus: der für die Normalspule als Träger dienende Marmorring war nur so breit, wie die Windungslage der Spule selbst, die durch zwei hölzerne Stirnbretter auf dem Ring festgehalten wurde. Eins derselben hatte sich im Laufe der Zeit etwas geworfen, und in den entstandenen Zwischenraum zwischen Holz und Marmor war eine Drahtwindung hinuntergefallen. Es ist anzunehmen, daß darauf die Differenz in den Resultaten zurückzuführen ist.

Nach diesen Feststellungen wurde auf eine genauere Ausmessung des Feldes keine Mühe mehr verwandt; es wurden nur zur Orientierung einige Aufnahmen gemacht (Nr. 1–5).

#### § 5. Das neue Magnetfeld.

Inzwischen wurde das neue Solenoid in Arbeit gegeben. Es hatte, wie das Bucherersche, einen doppelwandigen Rahmen, der die Verwendung von Wasserkühlung gestattete.

Doch hatte es, um gegen Wasserdruck widerstandsfähiger zu sein, kreisförmigen Querschnitt und wurde aus zwei nahtlosen Präzisionsmessingrohren hergestellt. Die Rohre wurden, wie alle anderen verwendeten Materialien, mittels eines empfindlichen Magnetometers auf Eisenfreiheit untersucht. Die Dimensionen des Rahmens waren:

Innerer Radius . . . . .	9,85 cm
äußerer Radius . . . . .	11,125 „
Stärke der Rohrwandungen . . .	1,5 mm
Länge . . . . .	105 cm

Die Wickelung bestand aus 2 Lagen Kupferdraht von 1 mm Stärke. Auf die Enden des Rohres waren, um ein Abrutschen der Wickelung zu vermeiden, schmale Messingringe aufgelötet. Bei der Bewickelung war zuerst unter dem Gesichtspunkte vorgegangen worden, größtmögliche Homogenität des Feldes zu erzielen. Deshalb wurden sehr dünne Unter- und Zwischenlagen von Isolationsmaterial verwendet, ferner wurde emaillierter Kupferdraht benutzt. Indessen war unter diesen Umständen die Isolation nicht genügend. Eine Konstruktion, die schließlich zufriedenstellende Resultate ergab, führte zu folgenden Dimensionen:

Länge der Windungslagen . . . .	90,90 cm
Radius der inneren Wickelung . . .	11,196 cm
Windungszahl der inneren Wickelung	893 „
Radius der äußeren Wickelung . . .	11,304 cm
Windungszahl der äußeren Wickelung	904

Daraus berechnete sich das Feld im Achsenmittelpunkt nach der auf p. 540 angegebenen Formel für die einzelnen Lagen zu:

$$H_{m1} = 109,61 \cdot i \text{ (} i \text{ in elmag. Einh.)}$$

$$H_{m2} = 110,91 \cdot i \text{ (} i \text{ „ „ „ )}$$

und das Gesamtfeld

$$H_m = 220,52 \cdot i \text{ (} i \text{ in elmag. Einh.) } (\pm 0,2 \text{ Promille}).$$

Zur Sicherheit wurde jedoch der Feldwert auch noch auf experimentellem Wege bestimmt, und zwar durch Vergleichung mit einem Normalfeld von folgender Beschaffenheit:

Auf einen genau abgedrehten und abgeschliffenen Marmorring von 8 cm Breite und 29,82 cm äußerem Durchmesser war eine Lage 0,4 mm starken Emailedrahtes von 134 Windungen aufgewickelt. Ihre Breite war 59,5 mm. Um ein Herunterfallen der Windungen zu verhindern, war rechts und links ein etwas erhabener Rand von 1 cm Breite stehen gelassen worden. Der mittlere Radius der Windungen ergab

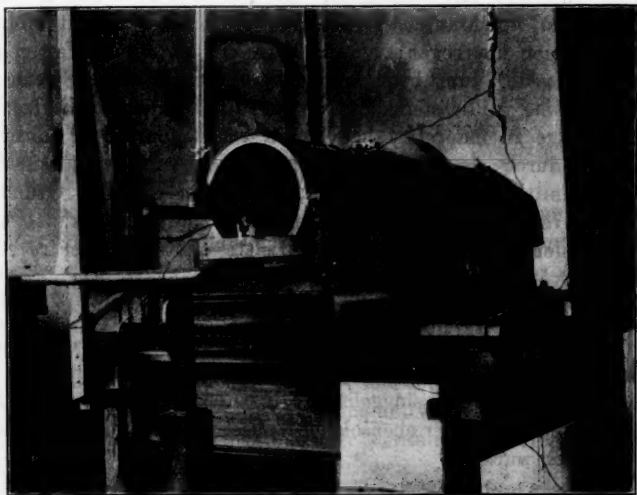


Fig. 6.

sich zu 14,93 cm. Aus diesen Angaben berechnete sich das Feld im Achsenmittelpunkt zu

$$H = 55,304 \cdot i \text{ (} i \text{ in elektromagn. Einh.)}.$$

Die Genauigkeit dieses Wertes beträgt 0,4 pro Mille.

Diese Spule war zwischen zwei hölzerne Stirnbretter geschraubt und mit diesen auf einem rechteckigen Grundbrett montiert. Sie wurde über das oben beschriebene Solenoid geschoben. Das Brett glitt als Schlitten zwischen zwei Holzleisten, die an das Grundbrett des langen Solenoids angeschraubt waren (vgl. Fig. 6). Auf diese Weise war eine

genau koaxiale Justierung und eine bequeme Verschiebbarkeit des Normals in der Achsenrichtung erreicht.

Die Ausmessung des Feldes ging in derselben Weise vor sich, wie früher bei dem Buchererschen Solenoid. Das Magnetometer, das sich von dem früher verwendeten nur in einigen konstruktiven Einzelheiten unterschied, stand auf einem rechteckigen Tischchen, unter das als Füße zwei in das Solenoid passende Kreissegmente, wie die in Fig. 4 mit *H* bezeichneten, geschraubt waren. Das Tischchen war mit Millimeterpapier überzogen; ebenso trug ein an ihm befestigter Holzstiel, der zum bequemeren Einsetzen in das Solenoid diente, eine Millimeterskala. Um das Tischchen in horizontaler Lage zu fixieren, führte unten am Boden in der ganzen Länge durch das Solenoid eine Leiste von rechteckigem Querschnitt, deren Enden durch Querhölzer mit dem Grundgestell verbunden waren (das eine Verbindungsstück ist in Fig. 6 deutlich sichtbar). Diese Leiste paßte in zwei rechteckige Ausschnitte der Kreissegmente (vgl. bei *H* Fig. 4) und diente so als Führung.

Der Kürze halber sei gleich hier eingefügt, daß das Gestell, das während der photographischen Aufnahmen das Glasgefäß nebst Messinggehäuse, Kondensator usw. trug (vgl. Fig. 4), mittels zweier ebensolcher Kreissegmente in das Solenoid eingepaßt wurde.

Der Absolutwert des Feldes im Solenoidmittelpunkt wurde nach der schon bei Ausmessung des alten Solenoids verfolgten Methode ermittelt. Nur wurde jetzt die Strommessung wesentlich genauer ausgeführt.

Der durch das Normal geschickte Strom wurde konstant gehalten und mit einem am Kompensationsapparat geeichten Präzisions-Milliamperemeter von Hartmann & Braun gemessen. Die sehr feine Fadenablesung dieser Instrumente gestattete bei Einstellung auf einen vollen Teilstrich eine Genauigkeit bis auf Bruchteile eines Promille. Variiert wurde der Strom im Solenoid; er wurde mittels Abzweigung von einem Normalwiderstand (von der P. T. R. geeicht) an einem Rapsschen Kompensationsapparat von Siemens & Halske gemessen. Hier, wie bei allen Messungen mit dem Kompen-



sationsapparat, diente als Normalelement ein von der P. T. R. geeichtetes Westonelement.

Die Messungen ergaben:

221,95

221,97

221,97

221,87

221,89 also im Mittel

$$H_m = 221,93 \cdot i \quad (i \text{ in elektromagn. Einh.}).$$

Da das Normalfeld nur auf 0,4 Promille ermittelt war, konnte diesem Resultat auch höchstens eine Genauigkeit von 0,4 Promille zukommen. Aber auch dann noch fiel die große Abweichung von dem auf rechnerischem Wege zu 220,52 erhaltenen Werte auf. Diese wurde zunächst darauf geschoben, daß die zum Evakuieren dienenden Luftpumpen, eine Quecksilber-Gaedepumpe nebst Gaedeschers Kapselvorpumpe, also nicht unbeträchtliche Eisenmassen, in etwa 1 m Abstand seitlich von einem Solenoidende standen. Sonst waren in 3 bis 4 m Umkreis vom Solenoid keine Eisenteile vorhanden. Die Pumpen waren zunächst mit Rücksicht auf ein möglichst schnelles Evakuieren in solche Nähe gestellt worden. Die Möglichkeit, daß dadurch das magnetische Feld wesentlich gestört werden könnte, gab jedoch Veranlassung, die Pumpen in etwa 3—4 m Entfernung zu bringen.

Eine Meßreihe ergab jetzt für  $H_m$ :

222,11

221,97

222,09

222,00 im Mittel

$$H_m = 222,04 \quad (\pm 0,4 \text{ Promille}).$$

Dies Resultat stimmte also innerhalb der zulässigen Fehlergrenze mit dem früheren Wert überein, ohne für die Abweichung von dem berechneten Wert eine Erklärung zu geben. Es war indessen noch möglich, daß diese Abweichung in der mangelhaften Konstruktion oder Justierung des Normals begründet war; daher wurde das Normal nochmals auseinander genommen, neu gewickelt und ausgemessen. Es ergab sich

diesmal: Windungszahl = 128 auf 59,5 mm, Windungsradius 14,94 cm, und daraus

$$H_{\text{normal}} = 52,815 \cdot i (\pm 0,3 \text{ Promille}).$$

Mit dieser Spule ausgeführte Messungen ergaben für das Feld im Solenoidmittelpunkt:

222,03

222,08

222,05

222,00

222,00

222,06

222,03 und im Mittel:

$$H_m = 222,04 (\pm 0,3 \text{ Promille}).$$

Aus der guten Übereinstimmung mit dem Resultat der vorherigen Messungen folgt offenbar, daß die Differenz zwischen experimentellem und theoretischem Wert in Formfehlern des Solenoids selbst zu suchen ist. Jedenfalls wurde für die weiteren Messungen der soeben angegebene Wert zugrunde gelegt.

Es sollte nun auch noch der Feldverlauf in dem für die Versuche benutzten Gebiet des Solenoidinnenraumes ermittelt werden. Eine punktweise absolute Ausmessung nach der eben angegebenen Methode wäre zu zeitraubend und schwierig gewesen. Es wurde daher die relative Abweichung der in Betracht kommenden Punkte vom Felde im Achsenmittelpunkt mittels einer Differential-Induktionsmethode bestimmt.<sup>1)</sup>

Hierzu wurden zwei kleine Induktionsspulen verwendet, die auf Hartgummiröllchen gewickelt waren. Die Dimensionen des Wicklungsraumes waren:

Äußerer Durchmesser . . . .	3,0 cm
Innerer           "           . . . .	1,5 "
Länge . . . . .	1,0 "

Die Wicklung bestand aus 0,05 mm starkem emailliertem Kupferdraht. Die Spulen wurden auf ihre Induktivität abgeglichen, indem sie gegeneinander geschaltet an zwei sym-

1) A. Bestelmeyer, Phys. Zeitschr. 12. p. 1109. 1911.

metrisch zum Mittelpunkt liegende Stellen des Solenoidinnern gebracht wurden. Sie waren an ein D'Arsonvalgalvanometer von Siemens & Halske gelegt, dessen Ausschläge auf Proportionalität untersucht waren. Seine Empfindlichkeit betrug  $2 \cdot 10^{-10}$  Amp./mm bei 2,5 m Skalenabstand. Der Widerstand des Instrumentes war 200 Ohm. Beim Kommutieren des Primärstromes im Solenoid von 5 Amp. zeigte sich ein Ausschlag, ein Zeichen, daß die Induktionskoeffizienten der beiden Spulen nicht gleich waren. Durch Abwickeln des Drahtes von der einen oder anderen Spule ließ sich der Ausschlag auf einen Betrag von wenigen Millimetern reduzieren, indessen gelang es aus rein technischen Gründen nicht, ihn gänzlich zum Verschwinden zu bringen. Das war auch nicht notwendig, da bei der folgenden Feldausmessung immer Doppelmessungen mit vertauschten Rollen stattfanden, wodurch der Fehler vollkommen eliminiert wurde. Der Widerstand der abgeglichenen Spulen betrug 3304 Ohm und 3317 Ohm. Die Spulen wurden auf dem schon für die magnetometrische Messung verwendeten Tischchen aufgestellt. Die eine Spule stand während einer Meßreihe im Achsenmittelpunkt fest, während die andere an die auszumessenden Feldpunkte gebracht wurde. Dann wurden die Rollen vertauscht und die Versuchsreihe wiederholt. Die Zu- und Ableitung zum Galvanometer war induktionsfrei. Die Zuleitungen wurden aufs sorgfältigste durch untergelegte Siegelackstücke (sog. Cammerlack) isoliert; das Galvanometer zeigte anderenfalls bei seiner hohen Empfindlichkeit einen sehr störenden Dauerausschlag von mehreren Zentimetern, die durch die Isolation der Zuleitungen hindurchgingen, verursacht wurde.

Zunächst wurde die Empfindlichkeit der Methode festgestellt, indem die beiden Spulen hintereinander geschaltet und symmetrisch zum Solenoidmittelpunkt möglichst nahe bei demselben aufgestellt wurden. Beim Kommutieren eines Primärstromes von 15 Milliamp. ergab sich ein Ausschlag von 17,5 mm. Dem in der Differentialstellung verwendeten Strom von 6 Amp. entspricht also ein Ausschlag von  $17,5 \cdot 6000/15 = 7000$  mm. Die durch diese Zahl dividierten Ausschläge bei der Feldausmessung ergeben die Abweichung des betreffenden Feldpunktes vom Feldmittelpunkt.

In Fig. 7 u. 8 sind die Messungsergebnisse wiedergegeben. Hier fällt die  $x$ -Achse mit der Solenoidachse zusammen, die  $y$ -Achsen sind Horizontalen, die durch die in der Fig. 8 angegebenen Punkte der Längsachse gehen; sie verlaufen also in den Querschnitten des Solenoids und geben den Feldverlauf in ihnen an.

Die beiden gerissenen Linien in Fig. 7 grenzen den benutzten Feldbereich längs der  $x$ -Achse ein.

Beide Figuren zeigen, daß das Feld in dem benutzten Bereich ( $\pm 2$ ;  $\pm 6$  cm) hinreichend homogen ist. Der extremste Wert ist 0,8 Promille. Nimmt man aus allen Abweichungen

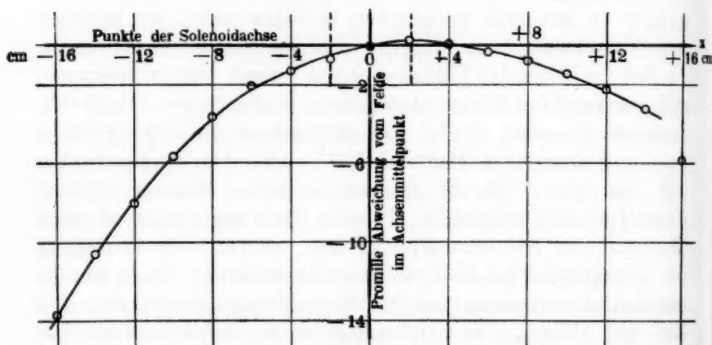


Fig. 7.

das Mittel, so ergibt sich ein mittlerer Feldwert, der um 0,14 Promille größer ist, als der Wert im Achsenmittelpunkt. Dem entsprechend wurde den Berechnungen der Wert

$H_m = 222,04 + 0,14 \text{ Promille} = 222,07 i$  ( $i$  in elektromagn. Einh.) zugrunde gelegt.

Mit dieser Spule wurden die Aufnahmen Nr. 6—36 inkl. gemacht. Aus äußeren Gründen fand zwischen Aufnahme Nr. 28 u. 29 eine Pause von 3 Monaten statt (vgl. Tab. Nr. I). Die Aufnahmen der neuen, mit Nr. 29 beginnenden Versuchsreihe zeigten zunächst normales Aussehen. Bei Aufnahme 35 und 36 waren indessen die  $\beta$ -Kurven sehr eigentümlich; sie lagen unsymmetrisch zur Nulllinie und waren stark verschwommen, und zwar die eine mehr als die andere. Ihr Aussehen ließ darauf schließen, daß im Solenoid zwischen der

Wicklung und dem Messingkörper Kurzschluß eingetreten war. Eine Isolationsmessung ergab in der Tat einen Übergangswiderstand von nur 50 000 Ohm. Wie dieser Kurzschluß zustande gekommen war, ließ sich nicht feststellen. Möglicherweise hatte die Isolation in der langen Pause zwischen Aufnahme 28 und 29 durch kondensierte Luftfeuchtigkeit gelitten und war dann während der folgenden Aufnahmen beim Öffnen des Magnetstromes, durch die dabei auftretenden nicht unbeträchtlich hoch gespannten Extraströme, allmählich zerstört worden.

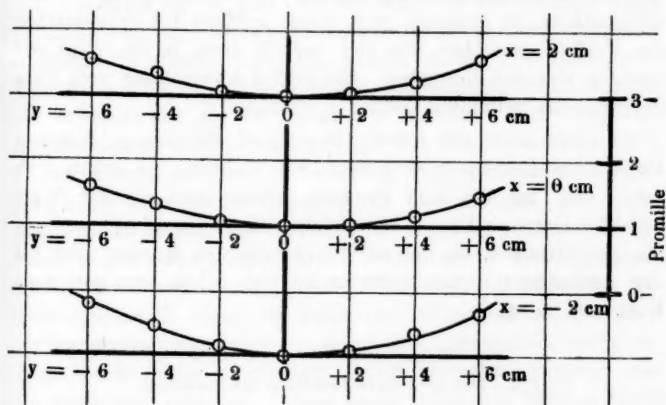


Fig. 8.

Leider war versäumt worden, vor Aufnahme Nr. 29 eine Isolationsmessung vorzunehmen; es wurden daher die sämtlichen Aufnahmen 29—36 zur Sicherheit nicht zur Berechnung verwertet. In der Zukunft wurde vorsichtshalber die Isolation des Solenoids nach je 2—3 Aufnahmen nachgeprüft.

Die Spule mußte also nochmals neu bewickelt werden. Diesmal wurde die Isolation so dick gewählt, daß in Zukunft über ihre Zuverlässigkeit nicht mehr zu klagen war.

Es ergaben sich die Dimensionen:

Länge der Wicklungen . . . . .	99,90 cm
Radius der inneren Wicklung . . .	11,304 „
Windungszahl der inneren Wicklung .	904
Radius der äußeren Wicklung . . .	11,46 cm
Windungszahl der äußeren Wicklung .	828

Das Feld wurde in der früher beschriebenen Weise ausgemessen. Der absolute Wert im Achsenmittelpunkt war:

213,74

72

72

73

---

$H_m = 213,73$  Gauss für den Strom einer elektromagnet. Einheit.

Die Relativausmessung ergab, wie bei der größeren Isolationsstärke zu erwarten war, etwas größere Inhomogenitäten des Feldes als früher, die sich jedoch noch in durchaus zulässigen Grenzen bewegten. Die größte Abweichung vom Feld im Achsenmittelpunkte betrug 1 Promille.

Bildete man, wie früher, das Mittel für alle gemessenen Punkte im Bereich ( $x = \pm 2$  cm,  $y = \pm 6$  cm), so ergab sich ein Wert, der um 0,17 Promille größer war als der Wert 213,73 i Gauss. Diese Abweichung liegt in durchaus zulässigen Grenzen, da der zur Erzeugung des Magnetfeldes bei den Aufnahmen dienende Strom an sich schon eine geringere Konstanz hatte.

#### § 6. Die photographischen Aufnahmen.

Im verdunkelten Zimmer wurde bei sehr schwachem rotem Licht eine photographische Platte eingelegt, nachdem vorher der Abstand  $a$  des Kondensatorrandes von der Plattenschicht bestimmt worden war.

Als Plattenmaterial diente die schon von Wolz verwendete Röntgenplatte von Westendorp u. Wehner in Köln, die von der Firma in Kreisform mit 5 cm Durchmesser geliefert wurde. Schichtablösungen im Hochvakuum kamen nie vor. Von Aufnahme 29 an wurden auf Spiegelglas gegossene Platten verwendet.

Nach Einsetzen der Platte wurde das Radiumpräparat mittels eines Wachsstückchens am Kondensator befestigt, die Messinghülse in das Glasgehäuse eingesetzt und die Zuleitungselektroden an die Kondensatorklemmen angelegt. Zum Abdichten der Schiffe diente eine Lösung von Gummi in Vaseline.

Der große Schliff am Glasgehäuse bot die meisten Schwierigkeiten für die Erziehung eines hohen Vakuums, zumal er am weitesten von der Pumpe entfernt lag. Gerade infolge der schwierigen Abdichtung dieses Schliffes mißlang eine Anzahl Aufnahmen, da durch die im Apparat vorhandenen geringen Gasreste die Platten oft verschleiert wurden. Auf Fernhalten von Staubteilchen und Fasern wurde besonders geachtet. Alle Schliffe wurden vor jeder Aufnahme gereinigt und neu geschmiert.

Nachdem der Apparat im Solenoid in die richtige Lage gebracht war, und dessen Enden zum besseren Lichtschutz mit schwarzen Tüchern verhangen waren, wurde mit Evakuieren begonnen. Hierzu diente eine Quecksilberpumpe von Gaede, die während der ganzen Dauer des Versuches lief. Das Vorvakuum wurde mittels Kapselpumpe von Gaede in etwa einer halben Minute erzeugt. Alle halben Stunden wurde die Vorpumpe für eine Minute eingeschaltet. Vor Anlegung der Felder mußte höchstes Vakuum herrschen, da sonst die photographische Platte stark verschleierte. Das Vakuum war erfahrungsgemäß hinreichend hoch, wenn in einer mit einem Induktorium betriebenen Geißleröhre, die nahe dem Glasgefäß an die Glasleitung angeschmolzen war, keine Röntgenstrahlen mehr erzeugt wurden. Bis so geringer Druck herrschte, verging eine bis eineinhalb Stunden. Diese lange Dauer war bedingt durch die infolge der früher erwähnten Umstellung der Pumpen sehr lang gewordene Rohrleitung. Doch habe ich mich durch einen besonderen Versuch (Nr. 11 des Protokolls in Tab. I) davon überzeugt, daß selbst in dieser langen Zeit keine merkliche Verschleierung der photographischen Platte auftrat, solange die Felder nicht angelegt waren. Die einzige Wirkung war, daß die von den unabgelenkten Strahlen auf der Platte erzeugte Nulllinie sehr kräftig wurde.

Während des Evakuierens wurde mit einem Rapsschen Kompensationsapparat die an den Kondensator anzulegende Potentialdifferenz gemessen, sie wurde von einer Hochspannungsakkumulatorenbatterie von 400 Zellen geliefert, von denen in Intervallen von 20 Volt abgezweigt werden konnte.

Durch sehr sorgfältige Reinhaltung und Isolierung der Zellen gelang es, die Spannung wochenlang nahezu konstant

zu erhalten. Um die Batterie vor Kurzschluß zu sichern, wurde in die Leitung zum Kondensator noch ein Widerstand von  $10^5$  Ohm geschaltet.

War das Vakuum hinreichend hoch, so wurden die Felder angelegt und die Wasserkühlung des Solenoids angelassen. Der das Magnetfeld erzeugende Strom wurde der städtischen Leitung von 220 Volt entnommen; er wurde mittels eines Präzisions-Milliamperemeters von Hartmann & Braun mit Nebenschluß für maximal 7,5 Amp. gemessen. Das Instrument war mittels Kompensationsapparat und Normalwiderstand geeicht. Da mit einem Regulierwiderstand immer auf ganze Skalenteile eingestellt wurde, gestattete das Amperemeter ein sehr genaues Ablesen. Allerdings schwankte die städtische Spannung dauernd, so daß der Strom ununterbrochen nachreguliert werden mußte. Bei den ersten Probeaufnahmen besorgte ich die Regulierung allein. Da indessen auf die Dauer die Aufmerksamkeit des Beobachters trotz angestrengtester Konzentration doch nachläßt — die Belichtungszeiten für eine Doppelaufnahme variierten zwischen 7 und 16 Stunden —, ließ ich mich später 2stündlich ablösen. Eine Anzahl Damen und Herren, die im Physikalischen Institut arbeiten, halfen mir in bereitwilligster Weise bei der Stromregulierung. Ihnen möchte ich dafür an dieser Stelle meinen besten Dank aussprechen.

Nachdem eine Kurve aufgenommen war, wurden die Felder kommutiert und auf dieselbe Platte eine zweite Aufnahme unter sonst gleichen Versuchsbedingungen gemacht, so daß man eine Doppelkurve erhielt, symmetrisch zur Nullinie. Dadurch wurde einmal größere Genauigkeit beim Ausmessen der Photogramme erreicht, da die  $\beta$ -Linien bedeutend feinere Struktur hatten, als die Nullinie; außerdem brauchte das Erdfeld nicht berücksichtigt zu werden, dessen Einfluß sich bei einer Doppelkurve heraushebt.

Sofort nach Beendigung der Aufnahme wurde die photographische Platte entwickelt und zugleich das Radiumpräparat vom Kondensator entfernt, um ein Leitendwerden der Quarzplättchen zu verhindern. Ferner wurde sogleich nach der Aufnahme die Spannung des verwendeten Teils der Hochspannungsbatterie nochmals bestimmt. Der Mittelwert der zu An-



fang und Ende jeder Aufnahme gemessenen Spannung wurde für die Berechnung benutzt.

Als Entwickler wurde eine 17prozentige Lösung von Hauffs „Adurol“ benutzt, der sehr kräftige Kontraste bei relativ geringer Schleierbildung gab. Die Platten wurden unter möglichster Fernhaltung jeglichen Lichtes im allgemeinen 5 Minuten lang entwickelt. Dann wurden sie mehrere Minuten in fließendem Wasser gut gespült, da sonst beim Fixieren die Schicht eine gelbrote Färbung bekam. Fixiert wurde in einem gewöhnlichen sauren Fixierbad. Die Temperatur der Bäder war Zimmertemperatur, also 15–20°.

#### § 7. Die Ausmessung der Aufnahmen.

Der Ausmessung der Platten, d. h. der Bestimmung der Ablenkung  $z$  stellten sich erhebliche Schwierigkeiten in den Weg. Solange ich mich auf kleine Geschwindigkeiten der  $\beta$ -Strahlung — 0,4 bis 0,6 der Lichtgeschwindigkeit — und kleinen Abstand  $a$  (4 cm) der photographischen Platte vom Kondensator beschränkte, erhielt ich sehr feine, scharfe Kurven. Aber schon bei  $a = 5$  cm wurden die Streifen für  $\beta = 0,6$  ziemlich verschwommen; für größere Geschwindigkeiten waren sie auch bei  $a = 4$  cm schon stark verwachsen. Wie schnell die Unschärfe der Kurven mit wachsendem  $a$  und  $\beta$  zunimmt, ist an den Figg. 9–13, Taf. IV, zu sehen, die übrigens an Klarheit und Schärfe hinter den Originalen zurückbleiben. Die Kurven zeigen im Aussehen Übereinstimmung mit den entsprechenden Kurvenstücken der von Bucherer l. c. reproduzierten Aufnahmen.

Für die feineren Linien wurde zur Ausmessung eine Kayser'sche Teilmaschine<sup>1)</sup> aus den Werkstätten von Wolz in Bonn benutzt, die für diesen Zweck passend abgeändert wurde. Auf die Glasplatte, die als Träger des auszumessenden Photogramms dient, wurden gerade Linien geätzt, senkrecht und parallel zur Schraubenspindelachse des Apparates. Nach ihnen wurden die Photogramme orientiert, so daß man den Abstand der  $\beta$ -Kurven auch wirklich in senkrechter Richtung bestimmte.

1) Vgl. H. Kayser, Handb. d. Spektroskopie. 1. p. 644/45. 1900.

Der durch fehlerhafte Justierung verursachte Messungsfehler beträgt weniger als  $\frac{1}{10}$  Promille.

Beleuchtet wurde die auszumessende Platte von unten her, indem auf den Beleuchtungsspiegel ein weißes Blatt Papier gelegt wurde, das das Licht einer Metallfarbenlampe diffus durch die Platte schickte. Das Auge des Beobachters wurde durch einen geeigneten Schirm vor direktem Licht sorgfältig geschützt.

Das am Apparat befindliche Mikroskop vergrößerte so stark, daß man die  $\beta$ -Linien nur noch als eine dichtere Anhäufung der Silberkörnchen in der Schicht erblickte. Schon bei zweifacher Vergrößerung begann das Plattenkorn sich störend bemerkbar zu machen. Daher wurde an Stelle des Mikroskops ein Diopter benutzt.

Ein bei dieser Einstellmethode durch Parallaxe verursachter möglicher Fehler betrug nur wenige Tausendstel Millimeter, war also zu vernachlässigen.

Die Ganghöhe der Schraubenspindel wurde durch Vergleich mit einer von der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt gezeichnet Silberskala zu 0,33326 mm bestimmt und zeigte sich längs des ganzen in Betracht kommenden Teiles der Spindel sehr konstant.

Es wurden bei jeder Platte, je nach der Klarheit derselben, 15 bis 20 Einzeleinstellungen gemacht. Der mittlere Fehler lag zwischen 0,3 und 0,6 Promille. Nur bei einigen weniger guten Aufnahmen, die im Anfange gemacht waren, stieg er bis auf 0,8 Promille.

Es wurde versucht, auch bei weniger scharfen Linien den Abstand  $z$  auf die eben beschriebene Weise auszumessen, also bei Platten, die mit  $\beta = 0,6$  und  $a = 5$  cm, oder bei Platten, die mit  $\beta = 0,7$  und  $0,8$  aufgenommen waren. Doch zeigte sich nach wenigen Einstellungen eine recht gute Übereinstimmung der Einzelwerte; indessen war leicht zu erkennen, daß dies nur daran lag, daß das Auge sich gewöhnte, das Fadenkreuz immer wieder auf dieselbe Stelle der  $\beta$ -Kurve einzustellen; ob dies aber wirklich die Stelle maximaler Schwärzung war, blieb zweifelhaft.

Deshalb mußte zur Ausmessung der Photogramme mit

unscharfen Linien eine andere Methode werden; dies geschah von Aufnahme 12 an. Zu diesem Zweck wurde ein photometrisches Verfahren ausgearbeitet, das schon an anderer Stelle veröffentlicht worden ist.<sup>1)</sup> Es wurde in der Weise verfahren, daß die Schwärzungsverteilung auf der auszumessenden Platte in der Richtung senkrecht zum Verlauf der Nulllinie in willkürlichen Einheiten bestimmt wurde. Die Resultate wurden in hundertfach vergrößertem Maßstabe aufgezeichnet und aus dem Abstände der Schwärzungsmaxima der  $\beta$ -Kurven die Größe  $2z$  ermittelt. Betreffs Details der Anordnung sei auf die zitierte Abhandlung hingewiesen. Dort ist auch eine (bei der Abmessung von Photogramm 29 erhaltene) Schwärzungskurve wiedergegeben.

Die Zuverlässigkeit dieser Methode wurde in der Weise geprüft, daß eine und dieselbe Platte, die für die Ausmessung mittels Teilmaschine hinreichend feine Linien hatte, sowohl photometrisch, wie mit der Teilmaschine ausgemessen wurde. Eine solche Vergleichung ergab z. B. bei Photogr. 33:

$$\begin{aligned} \text{Photometer: } z &= 0,8182 \text{ cm} \\ \text{Teilmaschine: } z &= 0,8169 \text{ ..} \\ \Delta &= 0,0013 \text{ cm} \end{aligned}$$

Auch die Übereinstimmung verschiedener photometrischer Ausmessungen derselben Platte war eine genügende; die Abweichungen betragen ebenfalls nur ca. 1 Promille. So ergab sich für Aufnahme Nr. 29 die Größe  $2z$  zu:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Ausmessung: } &1,0686 \text{ cm} \\ 2. \text{ Ausmessung: } &1,0697 \text{ ,,} \\ \text{also die Differenz} &= 0,0011 \text{ ,,} \end{aligned}$$

#### § 8. Die Resultate.

1. *Allgemeines.* Es wurden im ganzen 55 Aufnahmen gemacht, deren Protokolle in der Tab. I ausführlich wiedergegeben sind. Zur Erläuterung dieser Zusammenstellung sei

1) G. Neumann, Über eine einfache photometrische Methode zur Ausmessung der Schwärzung photographischer Platten. *Physik. Zeitschr.* 41. p. 241. 1913.

Tabelle I.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nr.	Datum	Belichtg.	H in Gauss	Potential in Volt am Kondensat.	a in cm	x in cm	$\beta$	$\left(\frac{e}{m_0}\right)_{p=0,10^3}$	$\left(\frac{e}{m_0}\right)_{p=0,10^2}$	$\left(\frac{e}{m_0}\right)_{\text{korrr. } 10^2}$	$\left(\frac{e}{m_0}\right)_{\text{korrr. } 10^3}$
1	15. 10. 11	3 Std.	113,7	562,22	4,0849						
2	17. 10. 11	5 "	113,7	561,02	4,0510						
3	18. 10. 11	5 + 5	113,7	561,17	4,0510						
4	20. 10. 11	4 $\frac{1}{2}$ + 4 $\frac{1}{2}$	113,7	480,27	4,0510						
5	24. 10. 11										
6	10. 8. 12	4 $\frac{3}{4}$ + 4	133,16	740,79	4,0464	0,5826 T	0,7392				
7	16. 8. 12	3 $\frac{1}{2}$ + 3 $\frac{1}{2}$	133,16	835,89	4,0464	0,4192 T	0,834				
8	19. 8. 12	3 $\frac{1}{2}$ + 3 $\frac{1}{2}$	133,19	850,16	4,6399	0,5550 T	0,858				
9	8. 9. 12										
10	9. 9. 12	4 $\frac{1}{4}$ + 4 $\frac{1}{4}$	133,16	699,00	4,1078		0,698				
11	10. 9. 12										
12	11. 9. 12	4 $\frac{1}{2}$ + 4 $\frac{1}{2}$	133,19	593,10	4,1035	0,9173 TP	0,59150	1,715	1,635	1,751	1,670
13	12. 9. 12	5 $\frac{1}{3}$ + 5 $\frac{1}{3}$	110,97	423,14	4,1028	0,9603 T	0,5065	1,718	1,664	1,755	1,700
14	13. 9. 12										
15	16. 9. 12	3 $\frac{3}{4}$ + 3 $\frac{3}{4}$	133,19	656,04	4,1026	0,7672 TP	0,65426	1,716	1,611	1,754	1,646
16	18. 9. 12										
17	19. 9. 12	3 $\frac{1}{2}$ + 3 $\frac{1}{2}$	133,19	761,66	4,8010						
18	20. 9. 12	3 $\frac{1}{4}$ + 3 $\frac{1}{4}$	133,19	846,61	4,8002						
19	21. 9. 12	6 + 4	133,19	698,74	4,8002						
20	24. 9. 12	3 $\frac{1}{2}$ + 3 $\frac{1}{2}$	133,19	804,15	4,8037						
21	26. 9. 12										
22	27. 9. 12	5 + 5	133,19	655,69	4,8078	1,0734 TP	0,65391	1,722	1,617	1,754	1,646
23	1. 10. 12					P					
24	3. 10. 12	4 + 4	110,97	592,28	5,1736	0,8726 PP	0,70897	1,723	1,558	1,757	1,597
25	5. 10. 12	4 + 4	133,19	592,18	4,1322	0,9389 TP	0,59059	1,724	1,644	1,765	1,655
26	8. 10. 12	4 + 4	110,97	506,47	5,1496	1,1720 P	0,60624	1,732	1,647	1,765	1,655
27	15. 10. 12	3 + 3	133,19	654,84	4,1689	0,8000 P	0,65308	1,725	1,620	1,766	1,630
28	21. 10. 12	4 + 4	133,19	654,85	4,6183	0,9854 P	0,65308	1,717	1,612	1,763	1,621
29	22. 1. 13	3 $\frac{1}{2}$ + 3 $\frac{1}{2}$	133,19	795,60	4,1882	0,5347 PP	0,79343				
30	23. 1. 13	3 $\frac{1}{2}$ + 3 $\frac{1}{2}$	133,19	732,14	4,1882	0,6375 P	0,73015				
31	30. 1. 13										
32	4. 2. 13	3 $\frac{1}{2}$ + 3 $\frac{1}{2}$	133,19	696,69	4,1882	0,7163 P	0,6948				
33	5. 2. 13	3 $\frac{1}{2}$ + 3 $\frac{1}{4}$	133,19	651,89	4,1882	0,8176 TP	0,65011				
34	8. 2. 13	4 + 4	133,19	607,66	4,1882	0,9234 T	0,60601				
35	10. 2. 13	4 $\frac{1}{3}$ + 4 $\frac{1}{3}$									
36	12. 2. 13	5 $\frac{1}{2}$ + 5 $\frac{1}{2}$									
37	18. 3. 13	3 + 3	128,19	772,85	4,1905	0,5004 PP	0,8008	1,759	1,547	1,802	1,586
38	19. 3. 13	3 $\frac{1}{3}$ + 3 $\frac{1}{2}$	128,19	665,87	4,1905	0,6966 PP	0,6900	1,722	1,599	1,764	1,638
39	20. 3. 13	4 + 4	128,19	580,75	4,1905	0,8961 T	0,60179	1,721	1,638	1,762	1,677
40	22. 3. 13	5 + 5	106,80	407,90	4,1905	0,9714 T	0,50732	1,736	1,682	1,778	1,722
41	9. 4. 13	3 $\frac{1}{2}$ + 3 $\frac{1}{2}$	128,19	766,64	4,6453	0,6165 P	0,79440	1,719	1,519	1,757	1,558
42	10. 4. 13	3 $\frac{1}{2}$ + 3 $\frac{1}{2}$	128,19	678,87	4,6453	0,8451 P	0,70347	1,756	1,622	1,795	1,638
43	11. 4. 13	4 + 4	128,19	591,59	4,6453	1,0852 T	0,61301	1,732	1,644	1,769	1,679
44	12. 4. 13	5 + 5	106,80	393,28	4,6453	1,2723 T	0,48133	1,728	1,679	1,764	1,714
45	14. 4. 13	7 + 7	96,323	284,11	4,6453	1,5657 T	0,39179	1,728	1,698	1,763	1,732
46	16. 4. 13	8 + 8	96,323	283,92	4,2013	1,2523 T	0,39152	1,727	1,697	1,767	1,736
47	18. 4. 13	4 + 4	128,19	762,96	5,1567	0,7939 P	0,79058	1,762	1,561	1,797	1,592
48	19. 4. 13	3 $\frac{1}{2}$ + 3 $\frac{1}{2}$	128,19	676,15	5,1567	1,0409 P	0,70065	1,729	1,598	1,763	1,630
49	21. 4. 13	4 + 4	128,19	589,05	5,1567	1,3635 P	0,6104	1,729	1,642	1,761	1,673
50	22. 4. 13	3 $\frac{1}{2}$ + 3 $\frac{1}{2}$	128,19	827,86	5,1567						
51	23. 4. 13										
52	24. 4. 13	5 + 5	106,80	391,66	4,2013	1,0319 T	0,48712	1,728	1,679	1,769	1,718
53	25. 4. 13	4 + 4	128,19	588,48	4,2013	0,8825 T	0,60979	1,724	1,638	1,766	1,677
54	22. 5. 13	4 + 4	128,19	693,20	4,2013	0,6427 P	0,71830	1,719	1,579	1,761	1,618
55	24. 5. 13	4 + 4	128,19	779,08	4,2013	0,4892 P	0,80730	1,751	1,534	1,794	1,573

# Protokolle der Aufnahmen.

13	14
Entwicklung, Verstärkung, Abschwächung Ausfall der Platte	Bemerkungen
Verschleiert, keine Linien sichtbar Ganzschwache $\beta$ -Kurve stark verschleiert Desgl. Desgl. Wegen Aussetz. d. Vakuums völlig verschl. Verschleiert, mit Blutlaugensalz abge- schwächt, sehr schwach Gut; $\beta$ -Kurven sehr stark verschwommen $\beta$ -Kurven sehr schwach u. verschwommen Vakuum ausgesetzt; Platte schwarz	Ohne Kommutieren Desgl. Doppelaufnahme Desgl. Aufnahme abgebrochen Ohne Blende Mit Metallblende Desgl. Luftpump. umgest. vgl. Ohne Blende [p. 547] Kondensator neu versilbert. Da kein gutes Vakuum zu erzielen, keine Felder angelegt. Nur benutzt z. Feststellen der Verschleierung beim Vorevakuierten. Ohne Blende. Desgl.
Platte ganz klar, nur starke Nulllinie vorhanden	Nur z. ersten Orientierung; zur Ausmess. unbrauch- bar; Magnetfeld mit dem Buchererschen Solenoid erzeugt. Unbrauchbar für die Be- rechnung, da sich nach- träglich ein Meßfehler bei der Bestimmung von $a$ herausstellte. Neues Solenoid.
Vakuum ausgesetzt, Platte schwarz	Desgl. Unbrauchbar; während der Aufnahme brannte ein Vorschaltwiderstand durch. Ohne Blende.
Verschleiert; abgeschwächt, $\beta$ -Kurven zu schwach geworden Desgl. Desgl. Desgl.	Desgl. Desgl. Eine Hälfte versehentlich 2 Std. zu lange belichtet. Ohne Blende.
Vakuum ausgesetzt, Platte schwarz Platte abgeschwächt Keine $\beta$ -Kurven 7 Min. entwickelt mit Bromkalizusatz Desgl.	Desgl. Felder falsch angelegt. Mit Siegellackblende. Desgl. $a$ mit Metallplatte gemessen. Siegellackblende. Desgl. Desgl.
$\beta$ -Kurven ganz verschwommen und asymmetrisch	Abgebr., Feld. falsch an- [gelegt] $\frac{1}{4}$ Std. früher beendet, da 1 Widerstd. durchgebr.
4 Min. entwickelt	Platten nicht verwertet, da die Isolation des So- lenoids durchschlagen worden (vgl. p. 551 ff.).
4 Min. entwickelt 6 Min. entwickelt	Kondensator neu versilb.
Mit $HgCl_2$ verstärkt	Solenoid neu gewickelt (vgl. p. 551 ff.). Photogr. Platten auf Spiegelglas, festgehalten mit am Randedrückender Feder (p. 537). Verbessert. Ein- stellung von $a$ . $a$ mit Metallpl. gemessen. Mit Siegellackblende.
$\beta$ -Linien sehr verwasc. Ausmess. unmögl.	Abgebr.; Pumpe setzt aus
4 Min. entwickelt, etwas abgeschwächt	

noch folgendes bemerkt. In Spalte 3 sind die Belichtungszeiten in der Weise angegeben, daß die auf jeden Kurvenzweig kommenden Zeiten durch ein Pluszeichen verbunden sind. Im allgemeinen waren sie gleich; nur bei wenigen Aufnahmen sind Differenzen vorhanden, die durch äußere Umstände bedingt sind. Der Grund ist in jedem Falle in Spalte 14 angegeben. Es wurden immer Doppelkurven aufgenommen, mit Ausnahme der Photogramme 1 und 2, die nur zur ersten Orientierung dienten.

In Reihe 7 bedeutet ein  $T$ , daß die betreffende Platte mittels Teilmaschine, ein  $P$ , daß sie auf photometrischem Wege ausgemessen wurde. In Spalte 8 sind die Geschwindigkeiten der verwendeten Strahlen in Bruchteilen der Lichtgeschwindigkeit angegeben. Die Spalten 9 und 10 enthalten die Berechnung von  $e/m_0$  nach der Lorentz-Einsteinschen bzw. nach der Abrahamschen Theorie, unter der Annahme, daß die Kondensator-Randkorrektur  $p = 0$  sei. Diese Werte können zu einer Entscheidung zwischen beiden Theorien herangezogen werden gleich den korrigierten Werten, da die Einführung der Randkorrektur alle Werte angenähert um denselben prozentualen Betrag vergrößert. Die Spalten 11 und 12 enthalten die entsprechenden Werte von  $e/m_0$  nach Einführung der Randkorrektur  $p$ .

Von den ersten 36 Aufnahmen waren nur sehr wenige zur Berechnung verwendbar; 28, d. h. fast  $\frac{3}{4}$  von ihnen mußten ausgeschieden werden. Dieses ungünstige Verhältnis findet seinen Grund darin, daß mir zunächst noch die experimentellen Erfahrungen mangelten. Trotzdem wurden alle diese Aufnahmen mitgezählt, um nicht den Anschein zu erwecken, daß die zur Berechnung herangezogenen Aufnahmen willkürlich ausgewählt wären. Die Aufnahmen 1—5 hatten durchaus den Charakter orientierender Versuche, da besonders in der richtigen Wahl der Belichtungszeit nicht unbeträchtliche Schwierigkeiten lagen. Einen ungefähren Anhalt bot mir dabei die Aufnahme des magnetischen Spektrums des benutzten Radiumpräparats, das nach einer von v. Baeyer, Hahn und Meitner<sup>1)</sup> angegebenen Methode aufgenommen wurde.

---

1) Vgl. v. Baeyer u. Hahn, *Physik. Zeitschr.* 11. p. 489. 1910 und v. Baeyer, Hahn u. Meitner, *Physik. Zeitschr.* 12. p. 1100. 1911.

Dabei ergab sich für das Schwärzungsmaximum des Spektrums  $\beta = 0,83$  rd.

Demgemäß war die Belichtungszeit für  $\beta = 0,7$  bis  $0,8$  am kürzesten und nahm dann für kleinere Geschwindigkeiten erst allmählich (bis  $\beta = 0,6$ ), dann schneller zu.

Nächst der richtigen Wahl der Belichtungszeiten machte die Erzielung eines guten Vakuums zunächst große Schwierigkeiten. Abgesehen davon, daß bei Vorhandensein von Gasresten die  $\beta$ -Strahlen auf ihrem Wege bis zur photographischen Platte gebremst werden, verschleiern die Platten bei nicht genügend hohem Vakuum stark, da die Gasreste zu leuchten anfangen. Eine Metallblende von etwa 6 mm Spaltbreite, wie sie Wolz vor den Kondensator gesetzt hatte, erwies sich als nicht zweckmäßig; bei kleineren Ablenkungen lagen die  $\beta$ -Kurven noch in dem von der Blende nicht geschützten Gebiet der photographischen Platte, bei größeren Ablenkungen lagen sie nahe bei dem Abbild der Blendenränder, was für die Ausmessung noch störender wurde. Ich begann daher ganz ohne Blende zu arbeiten, indessen verschleierten die Platten, besonders bei längerer Exposition, überaus stark. So waren diese Aufnahmen meist nicht brauchbar, und ich versuchte, eine Reihe von ihnen durch Abschwächung mit Blutlaugensalz zu verbessern, jedoch ohne Erfolg, da hierbei gleichzeitig die  $\beta$ -Kurven zu schwach wurden. Aus diesem Grunde mußten die Aufnahmen 17—20 verworfen werden. In der Folge wurde eine Blende von nur 3 mm Spaltbreite benutzt; diese wurde, um nicht den Weg der  $\beta$ -Strahlen zu stören, mit nur 2 mm Abstand vor den Kondensatorspalt gesetzt. Da bei Metall in dieser geringen Entfernung möglicherweise zu starke, den Feldverlauf störende Ladungen influenziert worden wären, wurde die Blende aus einer dünnen Scheibe Siegellack hergestellt. Die mit dieser Blende erzielte Schirmwirkung war zufriedenstellend.

Die ganze Reihe der Aufnahmen 29—36 endlich wurde wegen Durchschlagen der Isolation beim Solenoid ausgeschlossen.

Nachdem alle diese Schwierigkeiten überwunden waren, auch die Bestimmung des Abstandes  $a$  der photographischen Platte vom Kondensator hinreichend verbessert war — Fehler



bei dieser machen sich im Resultat stark bemerkbar —, fielen fast alle Aufnahmen zur Zufriedenheit aus; von Nr. 37 an waren nur zwei Platten nicht verwertbar.

Die zur Berechnung verwerteten Aufnahmen bilden fünf Versuchsreihen. Die erste Gruppe enthält die Aufnahmen 12 bis 28 ausschließlich der im Protokoll als unbrauchbar bezeichneten. Die nicht korrigierten Werte  $(e/m)_{p=0}$  lassen sich bei ihr nicht zur Prüfung der Relativ- und Kugeltheorie heranziehen, da die Aufnahmen teils mit, teils ohne Blende hergestellt worden sind, also bei verschieden starker Streuung des elektrostatischen Feldes. Ferner lassen sich nur diejenigen unkorrigierten Werte zusammenstellen, die mit gleichem Abstände  $a$  aufgenommen sind. Bei den in Frage kommenden Versuchen war es aber nicht möglich, bei der Neueinstellung genau den alten Wert von  $a$  wieder zu erhalten; eine dahinzielende Verbesserung der Apparatur wurde deshalb von Aufnahme 37 an getroffen.

Die Randkorrektur  $p$  für Aufnahmen ohne Blende ließ sich aus Nr. 15 und 22 ermitteln, die für Aufnahmen mit Siegelackblende aus Nr. 25 und 26. Es ergaben sich die Werte:

Tabelle II.

		Relativtheorie	Kugeltheorie
ohne Blende	$p_{15/22}$	0,0455 cm	0,0455 cm
mit „	$p_{25/26}$	0,0510 „	0,0141 „

Da die späteren Versuchsreihen sämtlich für die Relativ- und gegen die Kugeltheorie entschieden, wurden für die Korrektionsrechnungen die Werte der ersten Kolonne herangezogen. In Tab. III sind die Ergebnisse dieser Meßreihe zusammengestellt, wobei die Aufnahmen nach steigenden Werten von  $\beta$  geordnet sind. In Fig. 14 sind die nach beiden Theorien berechneten Werte  $(e/m_0)_{\text{kor.}}$  als Funktion der Geschwindigkeit eingetragen. Der Vergleich der letzten beiden Vertikalreihen der Tabelle zeigt ein deutliches Abfallen von  $(e/m_0)_{\text{kor.}}$  mit wachsenden Geschwindigkeiten nach der Abrahamschen Theorie, während die nach Lorentz-Einstein berechneten Werte um einen Mittelwert in kleinen Grenzen schwanken.



Noch deutlicher wird dies Verhalten durch die graphische Darstellung illustriert.

Tabelle III (Fig. 14).

Nr	$p$	$a$ cm	$\beta$	Lorentz $\left(\frac{e}{m_0}\right)_{p=0}$	Abraham $\left(\frac{e}{m_0}\right)_{p=0}$	Lorentz $\left(\frac{e}{m_0}\right)_{\text{kor.}}$	Abraham $\left(\frac{e}{m_0}\right)_{\text{kor.}}$
13	15/22	4,1028	0,5065	$10^7 \cdot 1,718$	$10^7 \cdot 1,664$	$10^7 \cdot 1,755$	$10^7 \cdot 1,700$
25	25/26	4,1322	0,5906	1,724	1,644	1,765	1,655
12	15/22	4,1035	0,5915	1,715	1,635	1,751	1,670
26	25/26	5,1496	0,6062	1,732	1,647	1,765	1,655
27	25/26	4,1689	0,6531	1,725	1,620	1,766	1,630
28	25/26	4,6183	0,6531	1,717	1,612	1,753	1,621
22	15/22	4,8078	0,6539	1,722	1,617	1,754	1,646
15	15/22	4,1028	0,6543	1,716	1,611	1,754	1,646
24	25/26	5,1736	0,7090	1,723	1,588	1,757	1,597

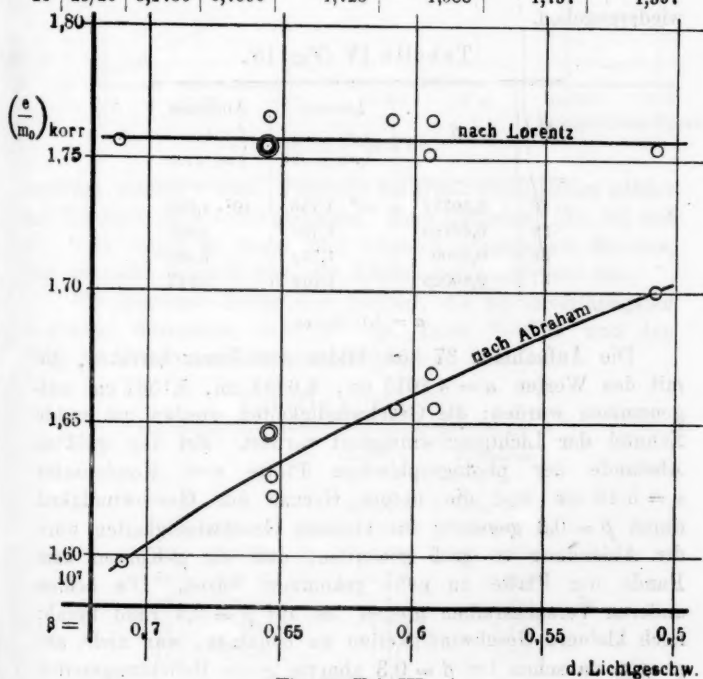


Fig. 14 (Tab. III).

Die zweite Versuchsreihe wird durch die Aufnahmen 37—40 gebildet. Sie sind sämtlich bei dem Abstände  $a = 4,1905$  cm aufgenommen worden. Leider ließen sie sich nicht zur Berechnung von  $p$  heranziehen, da nach Nr. 40 der Kondensator neu versilbert werden mußte, was natürlich eine andere Randstreuung des Kondensators bedingte. Zwar war diese Änderung an sich sehr klein, da die Versilberung infolge des Freihaltens der Stirnflächen immer sehr gleichmäßig ausfiel, und da auch die Zusammensetzung und Justierung des Kondensators nach der auf p. 538 ff. beschriebenen Methode eine sehr exakte war. Indessen machen sich selbst sehr kleine Versuchsfehler bei der Berechnung von  $p$  nach Gleichung (6) bis (8) schon sehr stark bemerkbar; weiter unten wird hierauf noch näher eingegangen werden.

Die Resultate dieser Versuchsreihe, die die Geschwindigkeiten  $\beta = 0,5 - 0,8$  umfaßte, sind in Tab. IV und Fig. 15 wiedergegeben.

Tabelle IV (Fig. 15).

Nr.	$\beta$	Lorentz $\left(\frac{e}{m_0}\right)_{p=0}$	Abraham $\left(\frac{e}{m_0}\right)_{p=0}$
40	0,50732	$10^7 \cdot 1,736$	$10^7 \cdot 1,682$
39	0,60180	1,721	1,638
38	0,6900	1,722	1,599
37	0,80085	1,759	1,547

$$a = 4,1905 \text{ cm.}$$

Die Aufnahmen 37—55 bilden drei Versuchsreihen, die mit den Werten  $a = 4,2013$  cm,  $4,6453$  cm,  $5,1567$  cm aufgenommen wurden; die Geschwindigkeiten wurden um runde Zehntel der Lichtgeschwindigkeit variiert. Bei dem größten Abstände der photographischen Platte vom Kondensator  $a = 5,16$  cm war die untere Grenze der Geschwindigkeit durch  $\beta = 0,6$  gegeben; für kleinere Geschwindigkeiten wäre die Ablenkung so groß geworden, daß die  $\beta$ -Kurven dem Rande der Platte zu nahe gekommen wären. Die beiden anderen Versuchsreihen gingen bis auf  $\beta = 0,4$  rund herab; noch kleinere Geschwindigkeiten zu benutzen, war nicht möglich, da schon bei  $\beta = 0,3$  abnorm große Belichtungszeiten

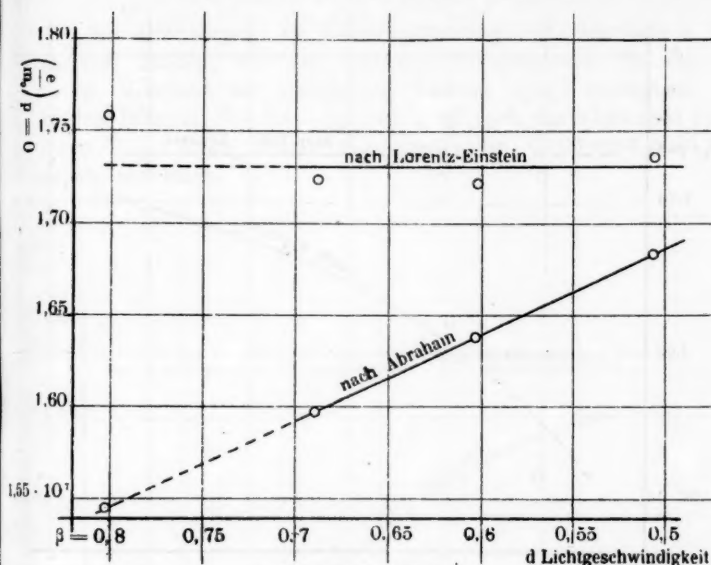


Fig. 15 (Tab. IV).

benötigt worden wären. Versuche bei Geschwindigkeiten größer als 0,8 sind noch nicht gelungen. Eine Aufnahme (Nr. 50) mit  $\beta = 0,85$  zeigte so breite und schwach ausgeprägte Maxima, daß es nicht möglich war, die Ablenkung  $z$  auszumessen.

Die Resultate dieser drei Reihen, die die zuverlässigsten Versuche darstellen, sind in den Tab. V—VII und den Fig. 16 u. 17 zusammengestellt worden.

Tabelle V (Fig. 16).

Nr.	$\beta$	Lorentz $\left(\frac{e}{m_0}\right)_{\beta=0}$	Abraham $\left(\frac{e}{m_0}\right)_{\beta=0}$
45	0,3918	$10^7 \cdot 1,728$	$10^7 \cdot 1,698$
44	0,4891	1,728	1,679
43	0,6130	1,732	1,644
42	0,7035	1,756	1,622
41	0,7944	1,719	1,519

$$a = 4,6453 \text{ cm.}$$

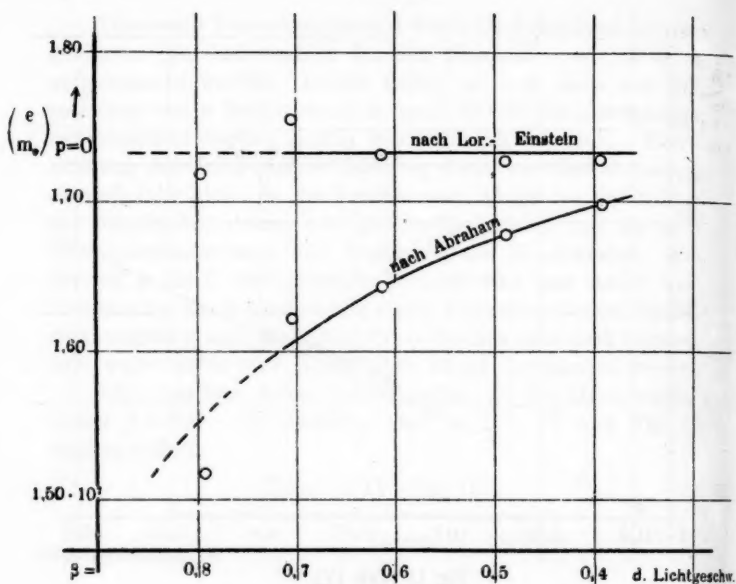


Fig. 16 (Tab. V).

Tabelle VI (Fig. 17).

Nr.	$\beta$	Lorentz $\left(\frac{e}{m_e}\right)_{p=0}$	Abraham $\left(\frac{e}{m_e}\right)_{p=0}$	$a$ in cm
46	0,3915	$1,727 \cdot 10^7$	$1,697 \cdot 10^7$	4,2018 4,2013
52	0,4871	1,728	1,679	
53	0,6098	1,724	1,638	
54	0,7183	1,719	1,579	
55	0,8073	1,751	1,534	

Tabelle VII.

Nr.	$\beta$	Lorentz $\left(\frac{e}{m_e}\right)_{p=0}$	Abraham $\left(\frac{e}{m_e}\right)_{p=0}$
49	0,6104	$10^7 \cdot 1,729$	$10^7 \cdot 1,642$
48	0,7007	1,729	1,598
47	0,7906	1,762	1,561

 $a = 5,1567$  cm.

Sie alle zeigen, in Übereinstimmung mit den beiden anderen Reihen, für die Lorentz-Einsteinsche Theorie völlige Konstanz der spezifischen Ladung  $e/m_0$ , wenigstens in dem Intervall  $\beta = 0,4 - 0,7$ , während nach der Abraham'schen Theorie die Werte mit wachsender Geschwindigkeit rapide abnehmen.

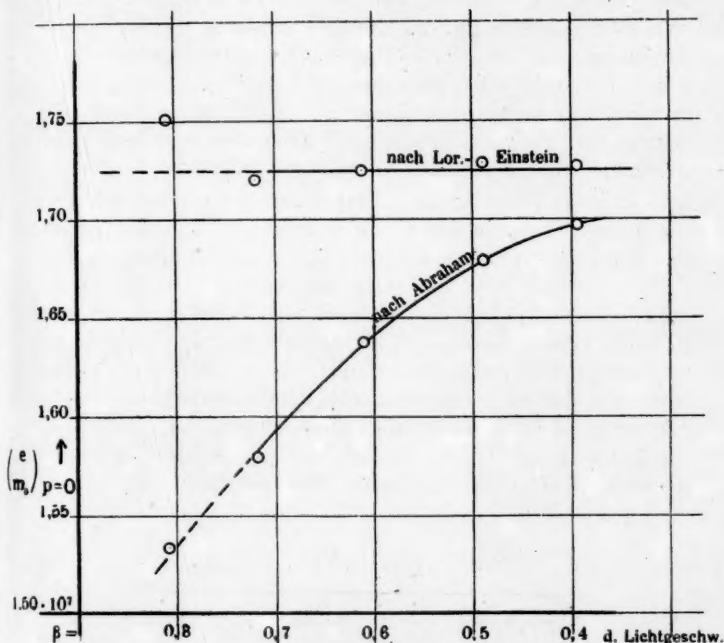


Fig. 17 (Tab. VI).

Alle bis  $\beta = 0,8$  gehenden Beobachtungsreihen zeigen, mit Ausnahme der in Tab. V und Fig. 16 wiedergegebenen, von  $\beta = 0,7 - 0,8$  einen auffälligen Anstieg von  $e/m_0$  nach der Relativtheorie. Es soll hierauf noch näher eingegangen werden bei Besprechung des Einflusses, den die nichtkompen- sierten Strahlen auf die Versuchsergebnisse haben können.

2. Die Randkorrektur  $p$ . Wie eingangs erwähnt, kann man den durch die Kraftlinienstreuung am Rande des Konden-

sators verursachten Fehler dadurch kompensieren, daß man eine Größe  $p$  einführt, um die man sich das homogene elektrostatische Feld verlängert zu denken hat. Diese Größe ist aus je einem Versuchspaar zu berechnen, das unter sonst möglichst gleichen Bedingungen, nur mit verschiedenem Abstände  $a$ , aufgenommen ist. Für die erste Versuchsreihe standen nur, wie schon erwähnt, zwei solcher Paare zur Verfügung, und zwar das eine für die Aufnahmen ohne, das andere für diejenigen mit Siegellack-Diaphragma. Die zweite Reihe konnte für solche  $p$ -Berechnungen überhaupt nicht herangezogen werden, da eine Neuversilberung des Kondensators notwendig wurde, ehe eine Parallelreihe mit verändertem Abstände  $a$  aufgenommen werden konnte.

Indessen stand für die  $p$ -Bestimmung in den Versuchen 41 bis 55 reichliches Material zur Verfügung. Tab. VIII zeigt, daß 11 Paare von Aufnahmen sich dazu zusammenstellen ließen, nämlich jede Aufnahme mit jeder in derselben Horizontalreihe stehenden. Der Idealfall, alle Versuchsbedingungen in solch einem Paare eben bis auf die Größe  $a$  ganz gleich zu machen, war zwar nicht möglich, da im Laufe der Zeit die Spannung der das elektrostatische Feld erzeugenden Batterie ein wenig sank; indessen sind diese Differenzen, und damit die Unterschiede der Geschwindigkeit  $\beta$ , bei den zu kombinierenden Aufnahmen durchschnittlich von der Größenordnung einiger Prozente.

Tabelle VIII.

$\beta$	$a_1 = 4,2 \text{ cm}$	$a_2 = 4,6 \text{ cm}$	$a_3 = 5,2 \text{ cm}$
0,8	Nr. 55	Nr. 41	Nr. 47
0,7	54	42	48
0,6	53	43	49
0,5	52	44	
0,4	46	45	

( $H$  in jeder Horizontalreihe konstant.)

Natürlich gehen in die  $p$ -Werte auch die Versuchsfehler der betreffenden beiden Aufnahmen mit ein und verursachen Differenzen derselben untereinander. Beim Ausrechnen der

einzelnen Werte zeigte sich leider, daß diese Versuchsfehler gegenüber den verwendeten Variationen von  $a$  sich außerordentlich stark bemerkbar machten. Während der Unterschied der Größen  $a_1/a_2$  und  $a_2/a_3$  0,4 cm bzw. 0,6 cm betrug, die Differenz  $a_1/a_3$  also etwa die doppelte Größe hatte, wie die beiden erstgenannten, verhielten sich die Abweichungen der  $p$ -Werte untereinander, die mit  $a_1/a_2$  und  $a_2/a_3$  einerseits, mit  $a_1/a_3$  andererseits berechnet waren, wie 1:18. Hätte man Werte von  $a$  verwenden können, die um 2 bis 3 cm differierten, so wäre zweifellos eine viel bessere und genauere Bestimmung von  $p$  möglich gewesen. Die Verwendung eines noch kleineren Abstandes als  $a_1$  hätte aber zu kleine Ablenkungen ergeben, während bei Abständen größer als  $a_3$  die  $\beta$ -Kurven übermäßig verschwommen ausgefallen wären. Eine Zusammenstellung der erhaltenen  $p$ -Werte ist in Tab. IX gegeben.

Tabelle IX.

	Aufnahme- paar	Lorentz $p$ cm	Aufnahme- paar	Lorentz $p$ cm	
aus $a_1/a_2$	53/49	0,02600	46/45	0,01900	} aus $a_1/a_2$ u. $a_2/a_3$
	54/48	0,05775	49/48	-0,04044	
	55/47	0,07148	52/44	0,00189	
			52/48	0,08768	
			47/41	0,50964	
			48/42	-0,38331	
			54/42	0,39771	
			55/41	-0,43777	

Wie außerordentlich empfindlich die  $p$ -Werte gegen kleine Versuchsfehler sind, ersieht man aus folgendem. Die zweifellos nur sehr unbedeutende Veränderung der Randstreuung bei der Neuversilberung des Kondensators zwischen Aufnahme 40 und 41 zeigt sich darin, daß die unkorrigierten  $\left(\frac{e}{m_0}\right)_{p=0}$ -Werte der Versuchsreihe 2 von solchen gleicher Geschwindigkeit aus den Versuchsreihen 3—5 durchschnittlich nur um wenige Promille differieren. Dagegen ergab eine versuchsweise angestellte Berechnung von  $p$  aus der Kombination dieser Werte ganz un-

sinnige Beträge, teils bis zu einigen Zentimetern, teils negative Werte von einigen Zentimetern.

Gemäß den obigen Darlegungen erschien es einwandfreier, nur die drei mit  $a_1/a_2$  berechneten  $p$ -Werte für die Bestimmung der korrigierten Werte heranzuziehen. Es wurde daher aus diesen drei  $p$ -Werten das Mittel genommen und  $p = 0,05174$  cm gesetzt, ein Wert der übrigens mit demjenigen der sich bei Versuchsreihe 1 für Aufnahmen mit Blende ergab, nämlich  $p = 0,0510$  cm, in guter Übereinstimmung ist.

Mit dem Werte  $p = 0,05174$  wurden auch die Aufnahmen 37 bis 40 korrigiert. Dies ist zwar nach dem oben Gesagten im strengen Sinne unzulässig, doch war eine gewisse Berechtigung dazu insofern vorhanden, als die  $e/m_0$ -Werte, wie früher ausgeführt, ganz wesentlich unempfindlicher gegen kleine Versuchsfehler sind als die  $p$ -Korrektion.

Die sämtlichen korrigierten Werte von  $e/m_0$  aller Versuchsreihen sind in Tab. X zusammengestellt nach steigenden Werten von  $\beta$  und in Fig. 18 als Funktion der Geschwindigkeit gezeichnet. Es ergibt sich auch hier, wenn wir einstweilen nur den Bereich  $\beta = 0,4-0,7$  berücksichtigen, völlige Konstanz nach der Relativtheorie, während nach der Abrahamschen Kugeltheorie eine sehr starke Abnahme mit wachsender Geschwindigkeit eintritt.

Tabelle X (Fig. 18).

Nr.	$\beta$	Lorentz $\left(\frac{e}{m_0}\right)_{\text{korr.}}$	Abraham $\left(\frac{e}{m_0}\right)_{\text{korr.}}$	Nr.	$\beta$	Lorentz $\left(\frac{e}{m_0}\right)_{\text{korr.}}$	Abraham $\left(\frac{e}{m_0}\right)_{\text{korr.}}$
46	0,39152	$10^7 \cdot 1,767$	$10^7 \cdot 1,736$	27	0,65308	$10^7 \cdot 1,766$	$10^7 \cdot 1,630$
45	0,39179	1,763	1,733	28	0,65308	1,753	1,621
52	0,48712	1,769	1,718	22	0,65391	1,754	1,646
44	0,48913	1,764	1,714	15	0,65426	1,754	1,646
13	0,50650	1,755	1,700	38	0,68998	1,764	1,638
40	0,50732	1,778	1,722	48	0,70065	1,763	1,630
25	0,59059	1,765	1,655	42	0,70347	1,795	1,658
12	0,59150	1,751	1,670	24	0,70897	1,757	1,597
39	0,60178	1,762	1,677	54	0,71830	1,761	1,618
26	0,60624	1,765	1,655	47	0,79058	1,797	1,592
53	0,60979	1,766	1,677	41	0,79440	1,757	1,553
49	0,61040	1,761	1,673	37	0,80085	1,802	1,586
43	0,61301	1,769	1,679	55	0,80730	1,794	1,572



Die Resultate bestätigen also durchaus die Schlüsse, die Bucherer aus seinen Versuchen gezogen hatte. Daß die Übereinstimmung eine durchaus eindeutige ist, zeigt Fig. 18, in der die Buchererschen Werte mit eingetragen sind.

Auch die Ergebnisse der Hupkaschen<sup>1)</sup> Arbeit werden durch die vorliegende Arbeit bestätigt und zugleich erweitert, da Hupka nur das Gebiet  $\beta = 0,35-0,53$  untersuchte und auch keine absoluten Werte angab.

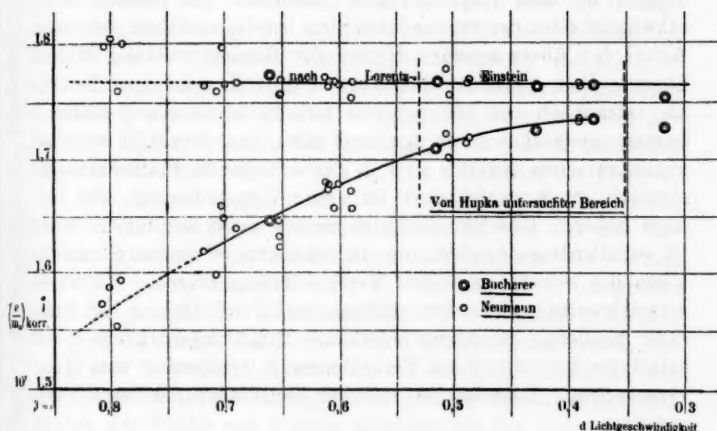


Fig. 18 (Tab. X).

3. Der Einfluß der nichtkompensierten Strahlen. Die Resultate sind unter der Annahme berechnet, daß die  $\beta$ -Kurven auf den Photogrammen nur von den kompensierten Strahlen herrühren, bzw. daß das Maximum der Schwärzung in den Kurven durch diese Strahlen erzeugt wird. Das heißt mit anderen Worten, daß nur Strahlen eines unendlich kleinen Geschwindigkeitsbereiches den Kondensator verlassen, oder daß zum wenigsten die Strahlen benachbarter Geschwindigkeitsbereiche in zu vernachlässigender Stärke die Platte treffen. Völlige Homogenität würde verlangen, daß der Kondensatorspalt im Vergleich zur Kondensatorlänge unendlich schmal

1) Vgl. E. Hupka, Ann. d. Phys. 31. p. 169. 1910.

ist, während diese Größen bei dem verwendeten Apparat etwa im Verhältnis 1:200 stehen. Infolgedessen werden also wirklich auch nichtkompensierte Strahlen die photographische Platte treffen und das Schwärzungsmaximum der  $\beta$ -Kurve unter Umständen verschieben können. Bestelmeyer hat in der eingangszitierten Diskussion der Buchererschen Versuche hierauf seine Haupteinwände gegen die Buchererschen Resultate gestützt und kommt auf Grund von ihm angestellter Berechnungen zu dem Ergebnis, daß besonders bei höheren Geschwindigkeiten der verwendeten Strahlen der nichtkompensierte Anteil den überwiegenden Betrag der Gesamtstrahlung bilden könne. Das Aussehen der Kurven gibt ihm insofern Recht, als tatsächlich bei höheren Geschwindigkeiten die  $\beta$ -Kurven immer verwaschener werden und etwa von  $\beta = 0,75$  an der ganze zwischen Nulllinie und  $\beta$ -Kurve liegende Plattenbereich ziemlich stark verschleiert ist, eine Verschleierung, die bei noch höheren Geschwindigkeiten immer mehr zunimmt. Nun ist es allerdings fraglich, ob die nichtkompensierten Strahlen allein die Schuld an dieser Verschleierung tragen. Es wäre beispielsweise nicht ausgeschlossen, daß durch die im Kondensator bleibende Strahlung sekundäre Strahlungsvorgänge ausgelöst werden, die diese Verschleierung wenigstens zum Teil verursachen. Indessen ist hierüber kaum etwas Sicheres auszusagen.

Der von Bestelmeyer<sup>1)</sup> vorgeschlagene Weg wäre zweifellos der zuverlässigste. Indessen stellen sich der experimentellen Durchführung erhebliche Schwierigkeiten in den Weg. Um aus der Aufnahme des magnetischen Spektrums auf die Intensität der verschiedenen schnellen Strahlen schließen und diese für die Korrektur in Anrechnung bringen zu können, müßte man für jede einzelne Strahlungsgeschwindigkeit die Abhängigkeit der Plattenschwärzung von der Belichtungszeit bestimmen, da die photographische Platte bekanntlich keine Proportionalität zwischen Belichtungsdauer und Schwärzung zeigt. Oder aber, man müßte für jede einzelne Platte eine Parallelaufnahme des magnetischen Spektrums mit gleicher Expositionsdauer machen. Außerdem müßten die Entwicklungs-

---

1) E. A. Bestelmeyer, l. c. p. 170. 171.

bedingungen für die Aufnahmen und die magnetischen Spektrogramme ganz gleiche sein bezüglich Temperatur und Konzentration der Lösungen, sowie Entwicklungszeit, da hiervon die Schwärzungsverteilung in der photographischen Schicht ja auch beeinflußt wird.

Diese recht umständliche Arbeit ist indessen nicht notwendig, um den Einfluß der nichtkompensierten Strahlen auf die Resultate der Messungen zu untersuchen, insbesondere ihren Einfluß auf die Sicherheit, mit der man über die Gültigkeit der beiden in Frage stehenden Theorien entscheiden kann. Ich habe vielmehr den umgekehrten Weg eingeschlagen und mich gefragt, wie groß der durch die nichtkompensierten Strahlen verursachte Fehler sein müßte, um die mitgeteilten Ergebnisse umzustoßen, d.h. also Konstanz der nach der Kugeltheorie berechneten Resultate für alle Geschwindigkeiten zu erzielen.

Wie Fig. 18 zeigt, nimmt  $e/m_0$ , nach Abraham berechnet, im Intervall  $\beta = 0,4 - 0,7$  um 6,3 Proz. ab. Sollten alle Geschwindigkeiten denselben Wert von  $e/m_0$  ergeben wie  $\beta = 0,4$ , so müßte also diese Größe für  $\beta = 0,7$  um 6,3 Proz. größer sein; für  $\beta = 0,6$  ist die nötige Vergrößerung gleich 3,9 Proz., für  $\beta = 0,5$  gleich 1,2 Proz. Die Durchrechnung ergab, daß bei  $\beta = 0,5$  der Fehler von  $e/m_0$  von derselben Größe ist, wie ein Fehler in der Ablenkung  $z$ ; für größere Geschwindigkeiten wächst der Fehler von  $z$  noch schneller als der von  $e/m_0$ , die Verhältnisse liegen dann also noch günstiger. Berechnet man die zur angegebenen Vergrößerung von  $e/m_0$  benötigte Veränderung  $\Delta z$  von  $z$  für die einzelnen Versuche, so ergeben sich die in Tab. XI zusammengestellten Werte.

Tabelle XI.

$\beta = 0,5$			$\beta = 0,6$			$\beta = 0,7$		
Nr.	$z$ (cm)	$\Delta z$ (cm)	Nr.	$z$ (cm)	$\Delta z$ (cm)	Nr.	$z$ (cm)	$\Delta z$ (cm)
13	1,0	0,012	12	0,9	0,035	24	0,9	0,057
40	1,0	0,012	25	0,9	0,035	38	0,7	0,044
44	1,3	0,016	26	1,2	0,047	42	0,8	0,050
52	1,0	0,012	39	0,9	0,035	48	1,0	0,063
			43	1,1	0,043	54	0,6	0,040
			49	1,4	0,055			
			53	0,9	0,035			

Wie man sieht, sind also ganz beträchtliche Verschiebungen der Schwärzungsmaxima notwendig, um ein der Abrahamschen Theorie günstiges Resultat zu erhalten. Für  $\beta = 0,5$  ist  $\Delta z$  noch relativ klein, im Mittel gleich 1,3 Zehntelmmillimeter. Berücksichtigt man aber die in diesem Geschwindigkeitsbereich sich ergebende Kurvenschärfe (vgl. Fig. 9), so ist eine Verschiebung von dieser Größenordnung recht unwahrscheinlich. Noch schlagender sind die Werte der letzten Vertikalreihe: eine Verschiebung des Maximums um  $\frac{1}{2}$  mm erscheint mir nach dem Aussehen meiner Aufnahmen ganz ausgeschlossen. Wie z. B. Fig. 10 zeigt, ist die ganze Breite der  $\beta$ -Kurve nur wenig größer als  $\frac{1}{2}$  mm, und wenn in Fig. 11 die Kurve stärker verbreitert erscheint, so ist damit auch gleichzeitig ein größerer Betrag von  $z$  und damit von  $\Delta z$  verbunden. Bei alledem ist noch zu berücksichtigen, daß selbst ungünstigsten Falls die nicht kompensierten Strahlen nur einen Bruchteil der Gesamtstrahlung ausmachen. Die Intensität der Strahlung bei  $\beta = 0,7$  ist aber, wie die Schwärzungskurve des magnetischen Spektrums zeigt, nicht so sehr von der der benachbarten Strahlungsbereiche verschieden, als daß Bestelmeyer mit seiner Behauptung Recht hätte, die nichtkompensierten Strahlen könnten infolge beträchtlich größerer Intensität die Lage des Maximums sehr wesentlich beeinflussen.

Es ist also nicht anzunehmen, daß die Abnahme von  $e/m_0$  mit wachsender Geschwindigkeit der Elektronen, wie sie sich nach der Abrahamschen Theorie ergibt, auf den Einfluß der nichtkompensierten Strahlen zu schieben ist.

Anders ist es, wenn wir das bisher von der Betrachtung ausgeschlossene Gebiet  $\beta = 0,7-0,8$  untersuchen. Hier erscheint es nach den vorliegenden Versuchen zweifelhaft, ob  $e/m_0$  nach der Lorentz-Einsteinschen Theorie noch konstant ist. Denn von den vier Meßreihen, die bis  $\beta = 0,8$  gehen, zeigen drei einen Anstieg von  $(e/m_0)^{\text{Lor.}}$  (vgl. Fig. 18), während die Aufnahmen 41 und 42 der dritten Versuchsreihe (vgl. Fig. 16) sich umgekehrt verhalten. Hier liegt der mit  $\beta = 0,7$  erhaltene Wert weit höher als der für  $\beta = 0,8$ . Ob dies auf Versuchsfehler zurückzuführen ist, läßt sich nicht sagen, da die beiden fraglichen Aufnahmen durchaus normal verliefen.

Jedenfalls ist der Anstieg, den die drei übrigen Versuchsreihen übereinstimmend ergeben, sehr auffällig, und es fragt sich, ob dies Messungsfehler sind, die zufällig alle nach derselben Seite fallen, oder ob sich hier der Einfluß der nicht-kompensierten Strahlen bemerkbar macht. Es wurde, um dies festzustellen, eine der obigen entsprechende Berechnung angestellt. Gerade beim Übergange von  $\beta = 0,7$  zu  $\beta = 0,8$  zeigt sich eine starke Verbreiterung der  $\beta$ -Kurven; insbesondere wird bei  $\beta = 0,8$  die schon erwähnte Verschleierung des Zwischenraumes zwischen  $\beta$ -Kurve und Nulllinie stark bemerkbar. Die Berechnung ergab, daß zur Erklärung dieses Anstiegs des  $(e/m_0)^{\text{Lor.}}$ -Wertes eine Verschiebung des Maximums durch nichtkompensierte Strahlen um 0,01 cm im Mittel für die drei fraglichen Aufnahmen 37, 47 und 55 genügt. Dann ist es aber nicht ausgeschlossen, daß der Anstieg auf diese Weise zustande gekommen ist. Es ist beabsichtigt, mit passend veränderter Versuchsanordnung diesen Geschwindigkeitsbereich noch zum Gegenstand einer besonderen Untersuchung zu machen.

Bildet man aus den sämtlichen zur Verfügung stehenden Werten für  $(e/m_0)^{\text{Lor.}}$ , wie sie in Tab. X zusammengestellt sind, das Mittel, so ergibt sich die spezifische Ladung des Elektrons:

$$\frac{e}{m_0} = 1,767 \cdot 10^7 \text{ (elektromagn. Einh.)}$$

Ich habe ferner den Mittelwert gebildet, indem ich erstens die Ergebnisse der Versuchsreihen 1 und 2 wegen ihrer geringeren Zuverlässigkeit nur mit dem halben Gewicht bewertete und zweitens die mit  $\beta = 0,8$  erzielten Resultate ausschaltete, da sie mir aus den soeben angeführten Gründen nicht genügend sichergestellt erschienen. Dabei ergab sich:

$$\frac{e}{m_0} = 1,765 \cdot 10^7 \text{ (elektromagn. Einh.)}$$

Der mittlere Fehler dieses Wertes, der als das Resultat der Absolutmessungen zu betrachten ist, beträgt 1,5 Promille; der Wert ist also in der letzten Dezimale um rund drei Einheiten unsicher.

Es sei noch betont, daß die Ermittlung des Absolutwertes nicht das Hauptziel der Arbeit war. Die verwendete Methode erscheint wegen der schwierigen Bestimmung der Korrektur  $p$  für die Randstreuung des Kondensators hierzu weniger geeignet. Immerhin ergibt sich eine befriedigende Übereinstimmung mit den Resultaten der neuesten, speziell zur Ermittlung des Absolutwertes von  $e/m_0$  unternommenen Arbeiten.

Tabelle XII.

A. H. Bucherer	1909	$\beta$ -Strahlen	magn. u. elstat. Ablenkung	$1,766 \cdot 10^7$
K. Wolz . . .	1909	do.	do.	1,770
J. Malassez <sup>1)</sup> .	1911	Kathodenstr.	magn. Abl. u. elektr. Spann.	1,769
A. Bestelmeyer <sup>2)</sup>	1911	Oxydkathode	do.	1,766
Alberti I <sup>3)</sup> . .	1912	Photoelektr.	do.	1,756
Alberti II . . .	1912	do.	do.	1,766
G. Neumann .	1913	Becquerelstr.	magn. u. elstat. Ablenkung	1,765

Gerade darin aber, daß die Versuche in diesem Punkte — obwohl dies nicht das Hauptziel der Arbeit war — so gute Übereinstimmung mit den von anderer Seite erzielten Resultaten ergeben, scheint mir ein weiteres starkes Argument auch für die Beweiskraft meiner Ergebnisse über die Gültigkeit der Abrahamschen oder Lorentzschen Formeln zu liegen, sowie dafür, daß die von Bestelmeyer gegen die Methode erhobenen Einwände nicht stichhaltig sind.

Es sei noch erörtert, welchen Einfluß die Versuchsfehler auf das Ergebnis, betreffend die Gültigkeit der beiden in Frage stehenden Theorien, haben können.

Die den Hilfsmessungen der einzelnen Aufnahmen anhaftenden Fehler sind schon an den Stellen angegeben worden, wo diese Hilfsmessungen besprochen wurden. Sie machen sich, wie die Figuren zeigen, durch ein mehr oder weniger starkes

1) J. Malassez, Ann. d. chim. et phys. 23. p. 231 u. 397. 1911.

2) C. A. Bestelmeyer, Ann. d. Phys. 35. p. 909. 1911.

3) E. Alberti, Ann. d. Phys. 39. p. 1133. 1912. Der unter I angegebene Wert ist mit den von Alberti selbst ermittelten Apparatkonstanten berechnet, der unter II mit den Konstanten, die von der Physik-Techn. Reichsanstalt für Albertis Apparate erhalten worden waren.

Abweichen der Einzelresultate von den ausgezogenen Kurvenzügen bemerkbar, ohne offenbar Einfluß auf das Resultat zu haben.

Indessen ist noch zu untersuchen, inwieweit diejenigen Fehler Einfluß auf das Ergebnis der Arbeit haben, die gleichmäßig in alle Messungen eingehen, d. h. also erstens die Größe des magnetischen Feldes und zweitens der Abstand der Kondensatorplatten voneinander. Der mögliche Fehler des magnetischen Feldes ist auf p. 547 u. 548 zu 0,4 Promille bzw. 0,3 Promille angegeben; nehmen wir den ungünstigsten Fall von 0,4 Promille an, so zeigt Gleichung (4a) und (5a) (p. 533), daß dadurch der Nenner bei allen Berechnungen um 0,4 Promille im selben Sinne falsch würde. Es geht aber der Fehler von  $H$  auch in die Größe  $\beta$  ein, und zwar muß sich  $\beta$  entgegengesetzt wie  $H$  ändern, da nach Gleichung (3)  $\beta = E/H \cdot c$  ist; es müssen sich die Fehler von  $H$  in Zähler und Nenner addieren.

Wie die Durchrechnung ergibt, ist der Fehler von  $\tan \arcsin \beta$  nahezu gleich dem von  $\beta$  für  $\beta = 0,4$ , während für  $\beta = 0,8$  der Fehler des tangens-Ausdrucks gleich dem dreifachen Fehler von  $\beta$  ist. Für die dazwischen liegenden Geschwindigkeiten kann man in ersterer Annäherung annehmen, daß der Fehler von  $\tan \arcsin \beta$  zwischen diesen Extremfehlerwerten linear anwächst, also z. B. für  $\beta = 0,6$  gleich dem doppelten Fehler von  $\beta$  ist.

Für den Ausdruck

$$\left[ \frac{3}{4\beta} \frac{2\delta - \mathfrak{Z}_g 2d}{\mathfrak{Z}_g 2\delta} \right]$$

(vgl. 5a) gilt ähnliches. Für  $\beta = 0,4$  ist ein Fehler bei  $\beta$  und bei dem Klammerausdruck von gleicher Größe, bei  $\beta = 0,8$  ist der Fehler der Klammer doppelt so groß wie bei  $\beta$ ; bei  $\beta = 0,6$  etwa gleich dem 1,5fachen.

Daraus folgt: Bei dem Maximalfehler von 0,4 Promille von  $H$  würde der Wert von  $e/m_0$  bei kleinen Geschwindigkeiten mit einem systematischen Fehler von 0,8 Promille behaftet sein, für  $\beta = 0,8$  würde dieser bei Zugrundelegen der



Lorentzschen Theorie auf 1,6 Promille steigen, bei Anwendung der Abrahamschen Theorie auf 1,2 Promille.

Der Abstand  $d$  der Kondensatorplatten voneinander geht nur ein in den tang-Ausdruck bzw. die Klammer. Seine Genauigkeit ist auf  $\frac{1}{2}$  Promille angegeben. Danach würde, unter Annahme dieses Maximalfehlers, sowie unter der weiteren Annahme, daß die Fehler von  $H$  und  $d$  sich summieren, der Wert von  $e/m_0$  noch um weitere 0,5 Promille falsch sein für  $\beta = 0,4$  in beiden Theorien. Bei  $\beta = 0,8$  ergibt sich der Fehler nach Lorentz zu 1,5 Promille, bei Abraham zu 1 Promille.

Faßt man all dies zusammen, so folgt: Bei  $\beta = 0,8$  kann  $e/m_0$ , nach Lorentz berechnet, einen systematischen Fehler von 3,3 Promille haben; nach Abraham berechnet, etwas weniger. In Fig. 18 würde das bedeuten, daß für diese Geschwindigkeit die nach beiden Theorien erhaltenen Kurven um weniger als 0,8 mm nach oben oder unten verschoben sind.

Bei  $\beta = 0,4$  beträgt dieser Fehler nur etwa 0,9 Promille, was einer Verschiebung der Kurven an dieser Stelle um etwa 0,2 mm entspricht. Man sieht also, daß die angegebenen Maximalfehler nicht imstande sind, die Ergebnisse wesentlich umzugestalten.

4. *Zusammenfassung.* Das Ergebnis der vorliegenden Arbeit läßt sich dahin zusammenfassen:

1. Die Gültigkeit der Lorentzschen Formel, die Einstein später auch aus seiner Relativitätstheorie entwickelt hat, ist im Geschwindigkeitsbereich  $\beta = 0,4$  bis  $\beta = 0,7$  erwiesen. Der nach ihr sich ergebende Wert von  $e/m_0$  zeigt in diesem Intervall völlige Konstanz; die einzelnen Werte weichen im Mittel nur um einige Promille nach beiden Seiten ab.

Nach den Abrahamschen Formeln berechnet, ergeben die Versuche mit wachsender Geschwindigkeit eine starke Abnahme des Wertes von  $e/m_0$ . Dies ist genau dasselbe Resultat, das auch Herr Bucherer erhalten hat.

Im Bereiche  $\beta = 0,7$  bis  $\beta = 0,8$  ist die Konstanz von  $e/m_0$  nach den Lorentz-Einsteinschen Formeln noch nicht sichergestellt, aber auch nicht widerlegt, da hier Mängel der Versuchsanordnung ins Spiel kommen können; das letztere ist



sogar wahrscheinlich, und die Versuche bedürfen deshalb in diesem Punkte noch einer Ergänzung.

2. Die spezifische Ladung des Elektrons ist

$$= 1,765 \cdot 10^7 \text{ (elektromagn. Einh.) } (\pm 1,5 \text{ Promille}).$$

Vorliegende Arbeit wurde im Breslauer Physikalischen Institut unter Leitung von Hrn. Prof. Dr. Clemens Schaefer ausgeführt, dem ich für sein Interesse, das er an der Durchführung der Arbeit genommen, zu großem Dank verpflichtet bin.

Breslau, Physikal. Institut der Universität, im Mai 1914.

(Eingegangen 2. Juni 1914.)

## 5. *Über elektrische und optische Resonanz;* *von Karl F. Lindman.*

### Einleitung.

1. Auf die mittels künstlich hergestellter Resonatoren-systeme nachgewiesene selektive Absorption und Reflexion der Hertzschen Wellen hat man sich bekanntlich mehrfach berufen bei der Erklärung gewisser optischer Erscheinungen, welche dabei als Resonanzwirkungen gedeutet worden sind. Hierher gehören in erster Linie die Versuche von Rubens und Nichols<sup>1)</sup> über die Reflexion dunkler Wärmestrahlen an fein geteilten Silberspiegeln. Nach Wood<sup>2)</sup> und Kossonogoff<sup>3)</sup> würden auch die fein verteilten Metallpartikelchen in Metallniederschlägen und nach Ehrenhaft<sup>4)</sup> die in kolloidalen Metallösungen in ähnlicher Weise wie die Silberplättchen in den vorher erwähnten Versuchen Resonatoren für die Lichtschwingungen bilden. Die Farbenänderungen, welche Lippmannsche Bromsilberplatten beim Trocknen zeigen (Verbreiterung und Verschiebung des Absorptionsmaximums nach der Seite der längeren Wellen hin) erklärt Kirchner<sup>5)</sup> im Anschluß zu der Planckschen elektromagnetischen Theorie der selektiven Absorption durch die Annahme, daß die als optische Resonatoren fungierenden Silberteilchen beim Eintrocknen der Gelatine ihren Abstand verkleinern, beim Aufquellen dagegen vergrößern.

2. Gegen diese Anschauungen der Herren Wood, Kossonogoff, Ehrenhaft und Kirchner hat jedoch Pockels<sup>6)</sup>

1) H. Rubens u. E. F. Nichols, Wied. Ann. 60. p. 418. 1897.

2) R. W. Wood, Phil. Mag. April u. Okt. 1902. Aug. 1903.

3) J. Kossonogoff, Phys. Zeitschr. 4. p. 208. 1903.

4) F. Ehrenhaft, Ann. d. Phys. 11. p. 489. 1903.

5) F. Kirchner, Ann. d. Phys. 13. p. 239. 1904.

6) F. Pockels, Phys. Zeitschr. 5. p. 152. 1904.

als erster Einwände erhoben, indem er auf mehrere von diesen Forschern nicht beachtete Umstände hinweist und meint, daß bei den von ihnen beschriebenen Erscheinungen Interferenz und Beugung die Hauptrolle spielen können. Gegen die oben erwähnte Bezugnahme auf die Resonanzversuche mit elektrischen (Hertzschen) Wellen bemerkt er, daß die Metallpartikelchen, welche bei den betreffenden optischen Versuchen als Resonatoren wirken sollten, als *kugelförmig* eine viel zu große Strahlungsdämpfung besitzen, „um noch eine deutliche Resonanz zustande kommen zu lassen“, während es sich bei den elektrischen Resonanzversuchen um Resonatoren (Drähte oder schmale Stanniolstreifen) handelt, deren Querdimensionen klein gegen die Wellenlänge sind, und welche folglich sehr viel geringere Strahlungsdämpfung haben als kugelförmige Resonatoren. Von den übrigen von Pockels gemachten Einwänden mag hier nur erwähnt werden, daß die von einigen Autoren angegebene Größe der Metallpartikelchen mit den Forderungen der Theorie nicht gut übereinstimmt.<sup>1)</sup> Obwohl Pockels also diejenige Auffassung als sehr unwahrscheinlich bezeichnet, nach der die *ganzen Metallteilchen* als Resonatoren wirken würden, bestreitet er in keiner Weise die Zulässigkeit der Annahme *intramolekularer Resonanz*, wie sie in der elektromagnetischen Lichttheorie zur Erklärung der anomalen Dispersion und selektiven Absorption herangezogen wird.

Es hat ferner Maxwell-Garnett<sup>2)</sup> nachgewiesen, daß in manchen Fällen die Farben kolloidaler Metallösungen, wenn die Metallpartikelchen im Vergleich zur Wellenlänge und zu ihren gegenseitigen Entfernungen sehr klein sind, mit Hilfe der von L. Lorentz<sup>3)</sup> für optisch inhomogene Medien entwickelten Theorie erklärt werden können. Die dabei auftretende selektive Absorption des Lichtes hat jedoch nichts mit Resonanz in dem oben erwähnten Sinne zu tun. In vielen anderen Fällen, und zwar bei sehr verdünnten Lösungen vermag aber, wie

1) Vgl. die Polemik zwischen Ehrenhaft u. Pockels, Phys. Zeitschr. 5. p. 387 u. 460. 1904.

2) J. C. Maxwell-Garnett, Phil. Trans. 203. p. 385. 1904; 205. p. 237. 1906.

3) L. Lorentz, Wied. Ann. 11. p. 70. 1880.

Mie<sup>1)</sup> bemerkt hat, die Lorentzsche Theorie die dabei auftretenden mannigfachen Färbungen nicht zu erklären. In diesen Fällen müssen die Eigenschwingungen der Teilchen berücksichtigt werden. Unter der vereinfachenden Annahme, daß die Partikelchen kugelförmig seien, hat Mie theoretisch nachgewiesen, daß die Farben kolloidaler Metalllösungen (speziell Goldlösungen) sich durch das Zusammenwirken des Absorptionsvermögens und des Reflexionsvermögens der Metallteilchen (die Maxima der Absorption und der Reflexion fallen im allgemeinen nicht zusammen) erklären lassen. Bei konstant gehaltener Konzentration ist nach Mie die von sehr kleinen Kugeln diffus reflektierte Strahlung proportional dem Volumen eines Partikelchens. In größeren Trübungen wächst sie mit zunehmender Teilchengröße langsamer und erreicht schließlich ein Maximum, dessen Lage von der Wellenlänge abhängt, und zwar ist in einer Trübung von fingierten vollkommen leitenden Kügelchen der Teilchendurchmesser, dem die maximale Strahlung entspricht,  $= 0,324 \lambda'$ , wenn  $\lambda'$  die Wellenlänge des Lichtes in dem umgebenden Medium ist. Bei kolloidalen Goldlösungen (wo das Gold nicht optisch als vollkommener Leiter angesehen werden darf) gilt kein so einfaches Gesetz, doch liegt der betreffende Teilchendurchmesser immer zwischen  $\lambda'/4$  und  $\lambda'/3$ . Das Auftreten dieses Strahlungsmaximums kann nach Mie mit einigen Vorbehalten als optische Resonanz bezeichnet werden, wobei man jedoch im Auge behalten muß, daß diese Maxima stets ganz flach sind. Eine optische Resonanz, die eine bestimmte Farbe kräftig heraushöbe, ist demnach wenigstens bei kugelförmigen Teilchen ausgeschlossen, und eine Erklärung der lebhaften Färbungen kolloidaler Lösungen durch Resonanz ist also unmöglich.

3. Nach Kossonogoff<sup>2)</sup> würde auch die Färbung der Schuppen auf den Flügeln der Schmetterlinge auf optischer Resonanz beruhen. Nach seinen Untersuchungen stimmt nämlich der Durchmesser der auf den Schuppen vorkommenden Körnchen mit der Lichtwellenlänge der nämlichen Farbe überein, die der untersuchten Flügelstelle eigentümlich ist. Nun

1) G. Mie, Ann. d. Phys. 25. p. 377. 1908.

2) J. Kossonogoff, Phys. Zeitschr. 4. p. 258 u. 518. 1903.

sind aber nach Kossonogoff diese Körnchen von dielektrischer Natur (Chitinkörnchen), und eine durch dielektrische Kugeln erzeugte Resonanzwirkung auf elektromagnetische (Hertzsche) Wellen scheint nicht nachgewiesen worden zu sein. Durch Versuche mit dielektrischen Zylindern (mit Leitungswasser gefüllten Glasröhren), die gegen die Wellenlänge der auf sie fallenden Hertzschen Schwingungen lang waren, haben allerdings Schaefer und Großmann<sup>1)</sup> neuerdings gewisse Beugungserscheinungen beobachtet, welche sie als Resonanzwirkungen der dielektrischen Zylinder gedeutet haben, und nach einer theoretischen Untersuchung von Debye<sup>2)</sup> kann man in der Tat auch bei dielektrischen Kugeln von Eigenschwingungen reden, deren Dämpfung und Periode von dem Brechungsexponenten der Substanz der Kugeln derart abhängen, daß diese Schwingungen um so weniger gedämpft sind, je größer der Brechungsexponent wird, während zugleich die Eigenwellenlänge stetig abnimmt. Wie bei kolloidalen Metallösungen können aber die durch diese Eigenschwingungen der dielektrischen Kugeln eventuell bedingten Maxima der diffus reflektierten Strahlung nur ganz flach verlaufen. Es ist also aus theoretischen Gründen sehr unwahrscheinlich, daß die lebhaften Farben der Schmetterlingsflügel durch optische Resonanz erklärt werden könnten.

Kossonogoff führt schließlich auch die Farben gewisser Präparate aus Anilinfarbstoffen auf optische Resonanz zurück. In diesem Falle — wie auch bei den von ihm untersuchten Metallniederschlägen — würde nach seinen Beobachtungen der Durchmesser der als Resonatoren wirkenden Körnchen der halben Wellenlänge des reflektierten Lichtes „sehr nahe gleich“ sein, welches aber nach den von Scotti<sup>3)</sup> an Anilinfarbenpräparaten ausgeführten mikroskopischen Messungen nicht zutrifft.

Nach Bock<sup>4)</sup> ist der Durchmesser der Tröpfchen im R. v. Helmholtzschen Dampfstrahl gleich (oder wenigstens von der Ordnung) der Wellenlänge derjenigen Lichtart, welche der

1) Cl. Schaefer u. F. Großmann, *Ann. d. Phys.* **31.** p. 498. 1910.

2) P. Debye, *Ann. d. Phys.* **30.** p. 57. 1909.

3) C. Scotti, *Nuovo Cim* (5) **7.** p. 334. 1904; *Beibl. z. d. Ann. d. Phys.* p. 283. 1905.

4) A. Bock, *Physik. Zeitschr.* **4.** p. 339 u. 404. 1903.

Dampfstrahl selektiv reflektiert. Daraus schloß Bock, daß die Farbe des Dampfstrahls und eventuell auch das Blau des Himmels als optische Resonanzerscheinungen aufzufassen seien. Dies ist jedoch von Scotti (l. c.) bestritten worden, indem dieser meint, daß es sich sowohl bei den Farben der Dampfstrahlen als auch bei den der Schmetterlingsflügel um Beugungsphänomene handle.

4. Einige „Resonanzversuche mit den längsten Wärmewellen“ sind neuerdings von Wood<sup>1)</sup> ausgeführt worden. Durch Kondensieren von Quecksilberdampf auf Quarzplatten gelang es ihm eine regelmäßige Verteilung kugelförmiger Metalltröpfchen von einigermaßen konstantem Durchmesser zu erhalten. Es wurde die Durchlässigkeit dieser „Resonatorplatten“ für dunkle Wärmewellen von der Länge  $1\ \mu$  und  $112\ \mu$  untersucht. Besonders bemerkenswert war, daß in keinem Falle das Schwächungsvermögen für die langen Wellen größer war als für die kurzen, woraus Wood schloß, daß jede Kugel nur den auf sie fallenden Teil der Energie der Wellenfront aufzuhalten vermochte. Wood bezeichnet dieses Ergebnis als ein einigermaßen überraschendes, da er erwartet hatte, daß man bei Kugeln von einer gewissen Größe für kurze Wellen eine mäßige Durchlässigkeit und für die langen Wellen vollkommene Undurchlässigkeit erhalten würde. Im Zusammenhang hiermit bedauert er, daß er weder eine theoretische noch eine experimentelle Untersuchung über die Wirkung dicht nebeneinander angeordneter kugelförmiger metallischer Hindernisse auf elektromagnetische Wellen zu finden vermocht habe, so daß es einstweilen kein Material gab, mit dem er seine Ergebnisse vergleichen konnte.

5. Beim Erscheinen der zuletzt erwähnten Publikation von Wood hatte ich schon eine experimentelle Untersuchung über die Einwirkung kugelförmiger Resonatoren und aus solchen bestehender Gitter auf elektromagnetische Wellen fast abgeschlossen, obwohl ich wegen äußerer Verhältnisse nicht Zeit gefunden habe, die Ergebnisse derselben früher als jetzt zu veröffentlichen. Zu dieser Untersuchung war ich durch den Wunsch veranlaßt, die zur Erklärung der oben erwähnten opti-

1) R. W. Wood, Physik. Zeitschr. 14. p. 189. 1913.

schen Versuche herangezogene Resonanzhypothese mit Experimenten vergleichen zu können, die den Vorstellungen über „die optische Resonanz“ besser entsprechen als die mit langgestreckten elektrischen Resonatoren früher ausgeführten Versuche. Als absorbierendes bzw. reflektierendes Medium habe ich dabei hauptsächlich ein aus kupfernen Hohlkugeln bestehendes Resonatorensystem benutzt; außerdem habe ich auch einige Versuche mit einer einzigen Kupferkugel sowie mit einigen dielektrischen Kugeln (Wasser und Alkohol) und mit einer elektrolytischen ( $H_2SO_4$ ) ausgeführt. Des Vergleichs halber wurde auch im Laufe der Arbeit eine Reihe von Versuchen mit geradlinigen Resonatoren und mit aus solchen zusammengesetzten Gittern angestellt. Am Ende der vorliegenden Abhandlung bringe ich einige Ergebnisse einer von mir schon früher an anderer Stelle veröffentlichten Arbeit über die Wirkung dünner ringförmiger Resonatoren auf elektromagnetische Wellen, welche ich jetzt in einigen Punkten ergänzt habe.

**Versuche mit einem von elektrischen Wellen bestrahlten kugel- oder stabförmigen Körper.**

1. Erreger, Empfänger (geradliniger Resonator mit Thermo-element) und Messungsmethode waren dieselben, welche ich bei einer früheren Gelegenheit<sup>1)</sup> beschrieben habe. Die fixen Punkte der aufgenommenen Kurven wurden demnach durch wenigstens drei, aber oft fünf bis neun gleichzeitige Ablesungen zweier Galvanometer bestimmt. Falls die Kurven in einigen Fällen vielleicht noch korrigiert werden müssen, so dürfte die Ursache dazu nicht in einer etwaigen Ungenauigkeit der Messungen, wohl aber in Mängeln der Versuchsanordnungen liegen.

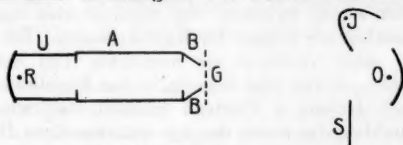


Fig. 1.

Die bei den Schirmwirkungsversuchen benutzte Versuchsanordnung geht aus Fig. 1 hervor. Der mit zylindrisch-parabolischem Strahlensammler und einem 50 cm langen Metall-

1) K. F. Lindman, Ann. d. Phys. 38, p. 526. 1912.



trichter  $U$  versehene Meßresonator  $R$  stand unmittelbar hinter einem weiten, 88 cm langen, mit Stanniolblättern überzogenen Rohr  $A$  (aus Pappe) von quadratischem Querschnitt (Seitenlänge des Quadrates = 45 cm). Der Vorderteil dieses Rohres endigte mit einer rechtwinkligen, 29 cm hohen und 32 cm breiten Öffnung  $B$ , vor deren Mitte der von den Wellen bestrahlte Körper gehalten wurde. Der Abstand zwischen dem Erreger  $O$  und der Rohröffnung betrug ca. 150 cm. Das von  $O$  ausgehende Strahlenbündel wurde an der einen Seite durch den Metallschirm  $S$  und an der anderen Seite durch den Strahlensammler des Standardindikators  $J$  abgegrenzt.

2. Zuerst untersuchte ich die Wirkung einer hohlen Kupferkugel<sup>1)</sup> deren (äußerer) Durchmesser = 7,0 cm war, und die vor der Mitte der rechteckigen Öffnung  $B$  mittels einer dünnen Holzleiste gehalten wurde.<sup>2)</sup> Durch Variieren der Eigen-

1) Nach einer von Righi in seiner Optik der elektrischen Schwingungen, p. 14 (1898), erwähnten Beobachtung gibt ein aus Hohlkugeln zusammengesetzter Oszillator eine bedeutend schwächere Wirkung als ein aus gleich großen massiven Kugeln bestehender. Es wäre deshalb auch denkbar, daß eine im Strahlungsfelde eines Erregers befindliche Hohlkugel sich etwas anders verhalten könnte als ein massiver. Ich fand aber, daß dies nicht der Fall war, welches ja auch mit den theoretischen Anschauungen im Einklang steht. Um auch die Righische Beobachtung zu prüfen, ersetzte ich die zylindrischen Ansatzstücke meines Oszillators mit je einer kupfernen Hohlkugel, die das eine Mal leer und das andere Mal mit Metallfeilspänen gefüllt waren. In beiden Fällen war die Wirkung des so erhaltenen Erregers genau (wenigstens bis auf etwa 2 Proz.) dieselbe. Nun ist zu bemerken, daß während bei dem Righischen Erreger die Primärfunken unmittelbar zwischen den Kugeln übersprangen, erfolgte die Funkenentladung bei meinem Apparate, wie schon angedeutet wurde, zwischen zwei festmontierten massiven Metallstücken, mit welchen die Kugeln im Kontakt waren. Bei dem Righischen Erreger wurde vielleicht ein merklicher Teil der Entladungsenergie zum Erzeugen von Erschütterungen der Kugelwände verbraucht. Dies würde auch denjenigen Umstand erklären, daß, wie Righi beobachtete, die Strahlungsintensität des aus dünnwandigen Hohlkugeln bestehenden Erregers mit abnehmender Wandstärke abnahm.

2) Weil die Öffnung  $B$  nicht so groß im Vergleich zur Kugel war, daß man die Größe der Kugel gegen die der Öffnung vollständig vernachlässigen könnte, zeigte es sich als vorteilhaft, die Kugel ein wenig vor der Öffnung zu halten. Bei Versuchen mit einer bedeutend größeren Kugel machten sich nämlich die durch Beugungen erzeugten Störungen (Unregelmäßigkeiten) besonders dann geltend, wenn



wellenlänge des Erregers und des mit ihm isochronen Meßresonators erhielt ich die Kurve I in Fig. 2, deren Ordinaten die von der Kugel bewirkte Schwächung in Prozenten der in Abwesenheit der Kugel durch die Öffnung *B* gegangenen Strahlungsintensität darstellen. Diese Kurve zeigt ein deutliches, obwohl flaches Maximum für eine halbe Wellenlänge von ca. 13 cm.

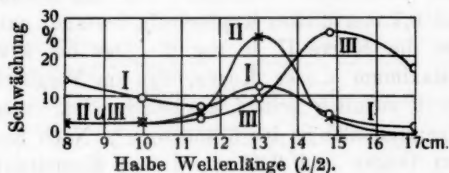


Fig. 2.

Für die Schwingungsdauer *T* der einfachsten axial-symmetrischen ersten Eigenschwingung einer sehr gut leitenden Kugel hat J. J. Thomson<sup>1)</sup> die Formel

$$T = \frac{4\pi a}{c\sqrt{3}}$$

aufgestellt, wo *a* den Radius der Kugel und *c* die Lichtgeschwindigkeit bedeuten. Dieser Eigenschwingungsdauer entspricht eine Wellenlänge in Luft:

$$\lambda_0 = \frac{4\pi a}{\sqrt{3}} = 7,25 a.$$

Da in unserem Falle *a* = 3,5 cm ist, erhält man nach dieser Formel für die halbe Eigenwellenlänge der betreffenden Kugel den Wert 12,7 cm, welcher mit der Abszisse des Maximums der Kurve I in Fig. 2 sehr nahe übereinstimmt.<sup>2)</sup> Der

die Kugel sich in der Öffnung befand. Falls andererseits kein Empfängerrohr (mit Diaphragmen) benutzt wurde, so konnte die zwischen Erreger und Meßresonator eingeführte Kugel unter gewissen Umständen sogar eine Verstärkung der beobachteten Strahlungsintensität erzeugen.

1) J. J. Thomson, Recent Researches in Electricity and Magnetism. p. 370. 1893.

2) Nach Pockels würde allerdings, falls nur die einfachste axial-symmetrische Eigenschwingung berücksichtigt wird, die maximale Resonanz schon bei  $\lambda/2 = 2,85 a = 10$  cm eintreten, und nach Mie (vgl. oben p. 582), der die Schwingungen einer leitenden Kugel auf

flache Verlauf dieses Maximums zeigt, daß die Eigenschwingungen der Kugel sehr stark gedämpft waren. Nach J. J. Thomson (l. c.) sinkt in der Tat die Amplitude während einer vollständigen Schwingung auf etwa  $\frac{1}{35}$  ihres ursprünglichen Wertes, so daß praktisch kaum mehr als eine einzige Schwingung ausgebildet wird.

3. Ein *geradliniger* Resonator, der aus einem 13,0 cm langen und 0,7 mm dicken Kupferdraht bestand, gab auf analoge Weise die Kurve II in Fig. 2. Das bei  $\lambda/2 = 13$  cm liegende Maximum dieser Kurve, das im Vergleich zu dem der Kurve I ziemlich scharf ausgebildet ist, entspricht der halben Eigenwellenlänge des Resonators.<sup>1)</sup> Nach Einschaltung eines 3 cm langen und 0,02 mm dicken Eisendrahtes in die Mitte des Kupferdrahtes (die Gesamtlänge betrug wieder 13 cm) verschob sich das Maximum und folglich auch die halbe Eigenwellenlänge um etwa 2 cm nach den größeren Wellenlängen hin (Kurve III in Fig. 2). Die von dem dünnen Eisendrahte bewirkte größere Dämpfung der Eigenschwingungen veranlaßte gleichzeitig eine Abflachung dieses Maximums. Es geht aus diesen Versuchen hervor, daß die bei der angewandten Versuchsanordnung erhaltenen Maxima der Schirmwirkung wirk-

eine allgemeine Weise behandelt hat, entspricht dem Strahlungsmaximum eine halbe Wellenlänge  $\lambda/2 = a/0,324 = 10,8$  cm. Nach später beschriebenen Versuchen besteht aber zwischen den von den direkten Primärwellen und den von den „sekundären“, von der Kugel ausgehenden Wellen im Meßresonator erregten Schwingungen eine Phasendifferenz, die, wenigstens im Intervalle  $\lambda/2 = 10$  cm bis  $\lambda/2 = 15$  cm, sich nur wenig von Null unterscheidet. Das Maximum der Schirmwirkung wird deswegen nicht an derselben Stelle wie das der Resonanz liegen, sondern muß (wie man sich leicht graphisch überzeugen kann), etwas nach der Seite der längeren Wellen hin verschoben sein.

1) Bei einem dünnen geradlinigen Sekundärleiter, der eine ausgesprochene Eigenperiode hat, entspricht das Resonanzmaximum angenähert dem Isochronismus zwischen Primär- und Sekundärleiter. Die „Sekundärwellen“ waren wahrscheinlich bei diesem Versuche, besonders wenn die Periode der Primärwellen von der Eigenperiode des Resonators ein wenig abwich, zu schwach, um eine merkliche Verschiebung des Schirmwirkungsmaximums erzeugen zu können. Bei einem System von mehreren linearen Leitern findet, wie wir später sehen werden, eine beträchtliche Verschiebung (nach links) statt.

lich durch die Eigenschwingungen des bestrahlten Körpers bedingt sind.

4. Ein mit *Kupfersulfatlösung* gefüllter Gummiball, dessen lichter Durchmesser = 7,4 cm war, gab auf ähnliche Weise die Kurve I in Fig. 3. Die Kurve II in derselben Figur stellt die Wirkung eines gleichen mit *destilliertem Wasser* gefüllten Gummiballes dar.

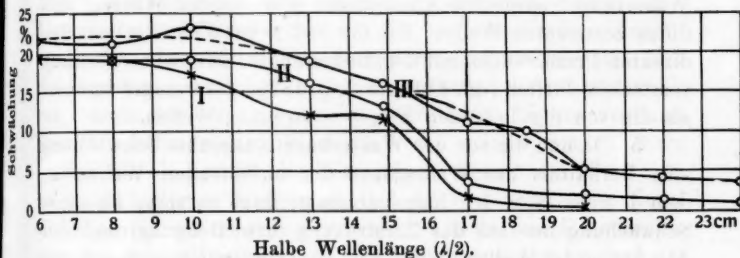


Fig. 3.

Die Kurve I zeigt bei  $\lambda/2 = 14$  cm ein schwaches Maximum, dessen Lage dem nach der Thomsonschen Formel berechneten Werte 13,4 cm für die halbe Eigenwellenlänge einer sehr gut leitenden Kugel vom Durchmesser 7,4 cm annähernd entspricht. Auch eine elektrolytische Kugel scheint also eine bestimmte Eigenperiode zu haben, die mit der einer gleich großen Metallkugel annähernd übereinstimmt. Bei gleicher von außen wirkender Erregung sind jedoch die Eigenschwingungen der elektrolytischen Kugel schwächer ausgebildet als die der Metallkugel (vgl. die Kurve I mit der entsprechenden in Fig. 2).

Die mit der dielektrischen Wasserkugel erhaltene Kurve II zeigt dagegen (in dem untersuchten Intervalle) kein Maximum, sondern nur ein mit abnehmender Wellenlänge der einfallenden Wellen wachsendes Schwächungsvermögen, welches sich wie das der elektrolytischen Kugel (Kurve I) einem Wert von etwa 20 Proz. nähert. Sobald die Wellenlänge der einfallenden Wellen größer als die Eigenwellenlänge einer metallischen Kugel von denselben Dimensionen war, nahm bei wachsender Wellenlänge die Schwächung in beiden Fällen, wie aus den Kurven I und II hervorgeht, schnell ab, so daß sie für  $\lambda/2 > \text{ca. } 17$  cm nur einige wenige Prozente betrug. Die

Kugeln üben also nur eine sehr geringe Schirmwirkung aus, falls die Wellenlänge der einfallenden Schwingungen größer als etwa das Vier- oder Fünffache des Durchmessers der Kugeln war. Annäherungsweise gilt dies auch für eine sehr gut leitende Kugel (vgl. die Kurve I in Fig. 2, p. 587). Daß die Ordinaten der Kurve II für  $\lambda/2 > 8$  cm ein wenig größer als die entsprechenden der Kurve I sind, erklärt sich durch die von der Wasserkugel ausgeübte Absorption. Die von der Wasserkugel diffus zerstreuten Wellen, die für  $\lambda/2 > \text{ca. } 8$  cm die von den direkten Primärwellen auf den Meßresonator ausgeübte Wirkung verstärken dürften (vgl. Fußnote 2, p. 587), sind weniger intensiv als die von der leitenden Kugel zerstreuten Wellen.

5. Da nun die von der Wasserkugel ausgeübte Schwächung vom Verhältnis der Wellenlänge der auffallenden Wellen zu dem Durchmesser der Kugel abhängt, fragt es sich, ob diese Schwächung nur auf der Zerstreuung (bzw. Beugung) und der Absorption der Wellen beruhe oder ob nicht auch eine Resonanzwirkung dabei stattfindet. Wie in der Einleitung (p. 583) erwähnt wurde, kann man nach den theoretischen Untersuchungen von Debye auch bei dielektrischen Kugeln von Eigenschwingungen reden. Die Wellenlänge  $\lambda_0$  der ersten elektrischen (von elektrischen Oberflächenladungen begleiteten) Eigenschwingung wird durch die folgende Formel<sup>1)</sup> bestimmt:

$$\frac{2\pi a}{\lambda_0} = 0,86 \left(1 - \frac{2}{3n}\right),$$

wo  $a$  den Kugelradius und  $n$  den Brechungsindex des dielektrischen Stoffes bedeuten (es wird vorausgesetzt, daß  $n$  gegen 1 groß ist). Für  $a = 7,4/2$  cm und  $n = 9$  (der Brechungsindex des Wassers für Hertz'sche Wellen) erhält man aus dieser Beziehung  $\lambda_0/2 = 14,6$  cm. An dieser Stelle (ungefähr) fängt nun in der Tat die Kurve II in Fig. 3 an, bei wachsender Wellenlänge rasch zu sinken, oder sie zeigt in der Umgebung dieses Wertes im ganzen eine deutliche, obwohl sehr flache Ausbiegung. Falls nun dies wirklich mit der „Eigenperiode“ der Wasserkugel zusammenhängt, so muß die erwähnte Ausbiegung der „Absorptionskurve“ sich nach rechts verschieben, wenn man anstatt einer Wasserkugel eine andere dielektrische Kugel von gleicher Größe aber mit kleinerem Brechungsindex

1) Vgl. P. Debye, l. c. § 5.

als Hindernis für die Wellen benutzt. Dies findet nun in der Tat statt, denn als derselbe Gummiball, der vorher Wasser enthielt, mit Alkohol gefüllt wurde, erhielt ich die (ausgezogene) Kurve III in Fig. 3, die eine deutliche Erhebung bei  $\lambda/2 = 18$  cm zeigt. Der Brechungsexponent des Alkohols (Äthylalkohols) für Hertz'sche Wellen nimmt bekanntlich ab bei abnehmender Wellenlänge. Nach Marx<sup>1)</sup> ist er (bei einer Temperatur von  $17^\circ \text{C}$ )  $= 4,543$  für  $\lambda = 53$  cm und  $= 2,966$  für  $\lambda = 4$  cm. Mit Benutzung des Mittelwertes  $n = 3,8$ , der einer halben Wellenlänge von etwa 15 cm entsprechen würde (vorausgesetzt, daß die Beziehung zwischen  $\lambda$  und  $n$  annähernd linear ist) erhält man nach der obigen Formel für die halbe Eigenwellenlänge der Alkoholkugel den Wert 16,3 cm, welcher um ca. 2 cm größer ist als der für die Wasserkugel berechnete Wert. Da es unter anderem denkbar ist, daß die Gummihülle der Kugel die Eigenperiode ein wenig vergrößern könnte und da außerdem der benutzte Mittelwert von  $n$  ziemlich unsicher ist, scheint es nicht ganz ausgeschlossen, daß die betreffende Ausbiegung der Kurve III als eine Resonanzwirkung gedeutet werden könnte. Die bei  $\lambda/2 = 10$  cm vorkommende zweite Erhebung dieser Kurve könnte dann vielleicht als eine Wirkung der ersten Oberschwingung aufgefaßt werden (theoretisch würde dieser Oberschwingung allerdings eine um einige Zentimeter kleinere halbe Wellenlänge entsprechen). Eine durch diese Resonanz bewirkte *kräftige* Heraushebung einer bestimmten Wellenlänge kommt aber in keinem Falle vor.

Falls man aber — was mir als plausibler erscheint — von diesen geringen Ausbiegungen (die eventuell auf Nebenumständen beruhen können) absehen kann, so würde die Kurve III die von der gestrichelten Kurve angegebene Form annehmen. Auch in diesem Falle würde man auf ähnliche Weise wie bei der Wasserkugel diejenige lange und flache Ausbiegung, welche diese Kurve in der Umgebung von  $\lambda/2 = 16$  cm zeigt, durch die Annäherung der Schwingungszahl der auf fallenden Wellen an die Eigenfrequenz der ersten elektrischen Eigenschwingung der Kugel vielleicht erklären können. Daß die Kurve III in dieser Gegend bei wachsender Wellenlänge

1) E. Marx, Wied. Ann. 66. p. 613. 1898.

langsamer sinkt wie die Kurve II, würde damit übereinstimmen, daß nach Debye (l. c.) die Absorption, die bei der Alkoholkugel größer als bei der Wasserkugel ist, im Sinne einer starken Abflachung der durch die Eigenschwingungen erzeugten Erhebungen wirkt.

Daß die Kurve III überall etwas höher verläuft als die Kurve II, beweist, daß die Alkoholkugel die Wellen besser abschirmte als die Wasserkugel. Von der auffallenden Strahlungsenergie dürfte demnach in der Tat ein verhältnismäßig großer Teil in die Alkoholkugel eindringen und für die mit dem Meßresonator zu beobachtende Intensität verloren gehen. Das bei wachsender Wellenlänge erfolgende raschere Sinken der Kurve II im Vergleich zu der der Kurve III könnte deshalb vielleicht auch nur als eine Wirkung der von der Wasserkugel diffus zerstreuten, verhältnismäßig intensiven Strahlung, von der ein Teil mit der direkten Strahlung im Meßresonator interferiert, erklärt werden. Bei der Alkoholkugel ist diese „sekundäre“ Strahlung aus den soeben erwähnten Gründen bedeutend schwächer, weshalb die Kurve III langsamer sinkt. Daß dieses Sinken der „Absorptionskurven“ gerade in der Nähe von der Eigenwellenlänge der Kugeln stattfindet, bleibt aber dann unerklärt.

6. Die Eigenschwingungen eines stabförmigen Leiters machen sich bekanntlich sehr deutlich merkbar durch die von ihnen in einem benachbarten Leiter induktiv erregten Schwingungen. Es war deshalb von Interesse zu untersuchen, ob auch dielektrische Stäbe, deren Länge von der Ordnung der halben oder der ganzen Wellenlänge der auf sie fallenden Hertzschen Wellen waren, irgendwelche von einer Eigenperiode der Stäbe herrührenden Induktionswirkungen in einem benachbarten Leiter zu erzeugen vermöchten. Ich machte deshalb einige Versuche mit Wassersäulen, die in dünnen Glasrohren eingeschlossen waren, und mit Hornstäben, wobei diese Körper in geeigneter Stellung vor dem zum Erreger und zur Strahlenrichtung senkrecht orientierten Meßresonator gehalten wurden.<sup>1)</sup> Die dadurch erzeugte Wirkung auf den Meßreso-

1) In einer früheren Arbeit (Ann. d. Phys. 40. p. 992. 1913) habe ich diese zum Nachweis von Sekundärwellen dienende Versuchsanordnung eingehend erörtert.

nator war aber in jedem Falle sehr schwach, und beim Variieren der Länge des dielektrischen Stabes konnte keine Resonanzkurve erhalten werden. Eine merkbare Einwirkung der Eigenschwingungen der dielektrischen Stäbe konnte also nicht auf diese Weise nachgewiesen werden. Bei einer dielektrischen Kugel dürften die Eigenschwingungen noch schwächer sein.

7. Falls nun aber doch eine dielektrische Kugel durch Resonanz auf elektromagnetische Wellen merkbar selektiv einwirken kann, welches nach den vorher (p. 590 u. 591) beschriebenen Versuchen wenigstens als möglich erscheint, so kann jedoch nach diesen Versuchen eine scharfe selektive Absorption dadurch nicht zustande kommen.<sup>1)</sup> Die Versuche beziehen sich allerdings nur auf die eventuell vorkommende Grundschiwingung und zum Teil auf die erste Oberschwingung solcher Kugeln; es ist aber unwahrscheinlich, daß die Eigenschwingungen höherer Ordnung einen stärkeren Einfluß haben könnten.<sup>2)</sup> Da nun ferner nach Debye (l. c.) die Dämpfung

1) Gegen diese und die nächstfolgenden Schlußfolgerungen kann allerdings der Einwand erhoben werden, daß sie sich nicht auf reinen Absorptionsmessungen gründen, sondern auf Versuchen, bei welchen die „Sekundärstrahlung“ sich über die Primärstrahlung lagerte, und welche man deshalb lieber als *Beugungsversuche* bezeichnen könnte. Die erhaltenen Schirmwirkungsmaxima sind also keine eigentlichen Absorptionsmaxima und bei Verwendung eines einzigen Resonators als Hindernis für die elektrischen Wellen muß auch aus dem erwähnten Grunde die Schirmwirkung von der Entfernung des Meßresonators von diesem Hindernis (von dem die Sekundärwellen sich nach allen Seiten ausbreiten) abhängen. Aus später beschriebenen Versuchen geht aber hervor, daß die von ebenen, aus Kupferkugeln zusammengesetzten Gittern erzeugten Reflexionsmaxima in keinem Falle schärfer ausgebildet sind als das mit einer einzigen Kupferkugel erhaltene Schirmwirkungsmaximum. Da nun die Sekundärstrahlung (d. h. die diffus reflektierte Strahlung) bei dielektrischen Massen bedeutend weniger intensiv ist als bei leitenden, muß auch ihre Einwirkung auf die Form der mit einer dielektrischen Kugel erhaltenen Schirmwirkungskurve geringer sein als die entsprechende Einwirkung bei einer leitenden Kugel.

2) Bei den kolloidalen Lösungen mit sehr feinen Teilchen, deren Leitfähigkeit nicht eine vollkommene sein kann, hat nach Mie (l. c.) nur die erste Schwingung, der „die Rayleighsche Strahlung“ entspricht, einen merklichen Betrag. Bei gröberen kolloidalen Lösungen tritt auch die zweite elektrische und die erste magnetische Schwingung hinzu. Es dürfte dies annäherungsweise auch für die Schwingungen dielektrischer Kugeln gelten.



der Eigenschwingungen einer dielektrischen Kugel mit abnehmender Dielektrizitätskonstante zunimmt (falls der Brechungsexponent sich dem Werte 1 nähert), so scheint es unmöglich, daß, wie Kossonogoff (vgl. Einleitung, p. 582) annimmt, die Chitinkörnchen auf den Schuppen der Schmetterlingsflügel, auch wenn sie von genau gleicher Größe wären, durch Resonanz eine scharfe selektive Absorption auf die Lichtwellen ausüben könnten. Wenn man bedenkt, daß die durch Eigenschwingungen dielektrischer Kugeln eventuell hervorgerufenen Ausbiegungen der Schirmwirkungskurven (Kurven II und III in Fig. 3, p. 589) sogar in dem für eine selektive Wirkung günstigsten Falle, d. h. für abnorm hohe Brechungsexponenten, nicht viel weniger als eine ganze Oktave umfassen, so scheint es nicht einmal möglich, die schwachen Farben, welche die von Bock (vgl. Einl. p. 583) untersuchten Dampfstrahlen zeigen, durch „optische Resonanz“ zu erklären.<sup>1)</sup>

Bei leitenden Kugeln findet zwar eine deutliche Resonanzwirkung statt, aber, wie aus dem auf p. 588 Gesagten hervorgeht, ist sie jedoch so schwach, daß eine *scharfe* selektive Reflexion oder Absorption, wie sie von Kossonogoff und Wood an Metallniederschlägen beobachtet wurde, dadurch nicht gut erklärt werden kann. Die von Kossonogoff angegebene Größe der Metallpartikelchen (vgl. p. 583), welche die eigentliche Stütze seiner Theorie bilden sollte, stimmt auch nicht mit den für den Kugeldurchmesser bei maximaler selektiver Wirkung oben gefundenen Werten überein. Breite Absorptionsbanden, wie z. B. die von Kirchner (vgl. p. 580) beobachteten, scheinen dagegen durch die Resonanz der Metallpartikelchen erklärt werden zu können<sup>2)</sup>, vorausgesetzt, daß

1) Die Wassertröpfchen der Dampfstrahlen sind allerdings nicht vollständig unleitend, da sie eine von dem Säureluftstrom stammende Spur von Säure enthalten. Ihre Leitfähigkeit dürfte wohl doch hier vernachlässigt werden können.

2) Durch Sublimation von metallischem Natrium an der Glaswandung einer evakuierten Röhre habe ich in ähnlicher Weise wie Wood eine sehr deutliche gelbgrüne Fluoreszenz an gewissen Stellen der Glaswand erhalten. Das durchgelassene Licht zeigte aber nicht, wie bei dem entsprechenden von Wood beschriebenen Versuche, einen Absorptionsband im Gelben, sondern eine fast gleichmäßige Absorption, die sich über das ganze Spektrum mit Ausnahme des violetten Teiles er-



die Größe der Partikelchen den Forderungen der Theorie entspricht.

8. Während die Hertz'schen Wellen an der Oberfläche des Wassers sehr stark reflektiert werden, so daß nur ein verhältnismäßig geringer Teil ihrer Energie in das Wasser eindringt, verhalten sich die Lichtwellen in dieser Hinsicht umgekehrt. Ich denke, daß es vielleicht nicht ganz unmöglich wäre, daß die Wassertröpfchen in den von Bock untersuchten Dampfstrahlen, die von der Größenordnung der Lichtwellen sind (vielleicht auch die größten in der Luft frei schwebenden Wassertröpfchen), auf die durch ihre Mitte gehenden Lichtstrahlen wie dünne Blättchen durch Interferenz selektiv wirken könnten. Durch eine einfache Betrachtung (deren Zulässigkeit jedoch noch näher geprüft werden muß) gelangt man dann tatsächlich zu dem Schluß, daß diejenige Lichtart, deren Wellenlänge mit dem Durchmesser einer Wasserkugel annähernd übereinstimmt, durch die erwähnte Interferenz im durchgehenden Lichte am meisten geschwächt wird. Auf ähnliche Weise würden vielleicht auch die Chitinkörnchen auf den Schmetterlingsflügeln wirken können (das Chitin ist bekanntlich auch eine durchsichtige Substanz). Es ist doch möglich, daß diese Wirkungen, falls sie in der Wirklichkeit überhaupt merkbar sind, nur eine untergeordnete Rolle spielen. Zu diesen Überlegungen war ich durch einige Versuche über den Durchgang Hertz'scher Wellen durch eine große mit Petroleum gefüllte Glaskugel veranlaßt, welche ich wenigstens vorläufig nicht auf andere Weise als durch Zuhilfenahme der erwähnten Hypothese erklären kann: Des Raumes wegen muß ich hier auf eine Beschreibung dieser Versuche und auf eine nähere Entwicklung der betreffenden Hypothese verzichten.

**Versuche mit aus kugel- oder stabförmigen Resonatoren  
bestehenden Gittern.**

**A. Durchlässigkeitsversuche.**

1. Außer der schon vorher benutzten Kupferkugel wurden 35 ähnliche kupferne Hohlkugeln vom Durchmesser 7 cm her-

streckte. Eine Absorption von dieser großen Breite, aber nicht eine so scharf begrenzte wie die von Wood beschriebene, scheint mir durch eine Resonanzwirkung der Metallkörnchen erklärt werden zu können.

gestellt. Das Gestell, welches diese Kugeln trug, bestand aus dünnen, an einem Holzrahmen befestigten Holzstäben, die an ihrer oberen Seite rinnenförmig ausgehöhlt waren. Mittelst kleiner Korkstücke wurde die Lage jeder Kugel stabilisiert.

Die Kugeln wurden zuerst in sieben horizontalen und fünf vertikalen Reihen so angeordnet, daß der gegenseitige Abstand zwischen den Mittelpunkten der benachbarten Kugeln = 9 cm war. Dieses Resonatorengritter, das bei den Durchlässigkeitsversuchen immer in genau dieselbe (mit Bezug auf die Öffnung möglichst symmetrische) Lage vor der Öffnung *B* in Fig. 1 (p. 585) gebracht wurde (der Abstand zwischen den

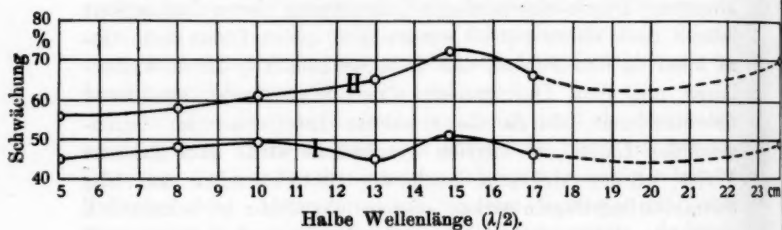


Fig. 4.

Kugelmittelpunkten und der Ebene der Öffnung betrug 7,5 cm), gab die Schirmwirkungskurve I in Fig. 4. Nach Vergrößerung des Abstandes zwischen Meßresonator und Gitter um 6,5 cm (das Gitter blieb dabei in unveränderter Lage vor der Öffnung *B*) erhielt ich eine mit I ganz übereinstimmende Kurve, welches zeigt, daß mehrfache Reflexionen zwischen Gitter und Empfängerspiegel keine merkliche Störungen erzeugten (sogar wenn der Empfänger nach Entfernung des 50 cm langen Trichters *U* in Fig. 1 unmittelbar hinter dem Rohre *A* aufgestellt wurde, veränderte sich die Schirmwirkungskurve nicht wesentlich). Die Kurve II wurde mit einem möglichst dichten Gitter erhalten, indem bei ihrer Aufnahme der Abstand zweier benachbarter Kugelmittelpunkte kaum 8 cm war. Aus einem Vergleich dieser Kurven mit der Kurve I in Fig. 2 (p. 587), die sich auf die Wirkung einer einzigen Kugel von gleichem Durchmesser bezieht, ergibt sich, daß der maximalen Schirmwirkung der aus gleich großen kugelförmigen

Resonatoren zusammengesetzten Gitter eine etwas größere Wellenlänge der auffallenden Strahlen entsprach als der einer einzigen freistehenden Kugel von gleicher Größe. Gleichzeitig findet man auch, daß die mit den Gittern erhaltenen Schirmwirkungsmaxima noch flacher verlaufen als das mit der isolierten Kugel erhaltene. Auf die Verschiebung der Schirmwirkungsmaxima sowie auf die bei  $\lambda/2 = 13$  cm vorkommenden Einbiegungen der Kurven I und II in Fig. 4 komme ich noch zurück bei der Erörterung der Reflexionsversuche (p. 601), durch welche noch deutlichere und regelmäßigere Kurven erhalten wurden.

Mit den in der Einleitung (p. 584) erwähnten Woodschen Resonanzversuchen mit den längsten Wärmewellen stimmen die in Fig. 4 dargestellten Versuchsergebnisse in mehreren Beziehungen recht gut überein. Für eine Wellenlänge, die viermal so groß ist wie der Durchmesser der Kugeln, ist die Schwächung nach der Kurve I in Fig. 4 nicht ganz 50 Proz., und nach den Woodschen Beobachtungen ist sie in dem entsprechenden von ihm untersuchten Falle, wo die Verteilungsdichte der Quecksilberkügelchen, wie es scheint, ein wenig kleiner war, 42 Proz.

Der Verlauf der Kurve I zeigt übrigens, in Übereinstimmung mit den Woodschen Ergebnissen, daß in dem soeben betrachteten Falle die Schwächung für kurze Wellen kaum kleiner war als für große Wellen ( $\frac{\lambda}{2} = 24$  cm). Wenn der Durchmesser der Kugeln im Mittel ein wenig kleiner als die halbe Wellenlänge und die Kugeln etwas mehr als im vorigen Falle zusammengedrängt waren, so betrug die Schwächung bei den Woodschen Versuchen 50 Proz., während sie in dem entsprechenden von mir untersuchten Falle nach der Kurve I in Fig. 4 ca. 48 Proz. war. Bei der dieser Kurve entsprechenden Verteilungsdichte der Resonatoren bedeckten diese fast genau 50 Proz. von der (900 qcm messenden) Fläche der Öffnung *B* in Fig. 1 (p. 585). Es stimmt dieses Prozent mit dem mittleren, auch für größere Wellenlängen geltenden Schwächungsprozent sehr nahe überein. Dasselbe trifft auch mit Bezug auf die Kurve II zu. In diesem Falle bedeckten nämlich die Resonatoren ca. 55 Proz. von der Fläche der Öffnung *B*, und mit abnehmender Wellenlänge nähert sich in der Tat der

Schwächungsprozent diesem Werte, während er für große Wellen ( $\frac{\lambda}{2} = 24 \text{ cm}$ ) nicht viel größer ist. *Die Kugeln vermochten also im allgemeinen* (d. h. wenn die Wellen nicht gerade in Resonanz mit den Kugeln standen) *und im Mittel*<sup>1)</sup> *nur den auf sie fallenden Teil der Energie der Wellenfront aufzuhalten*, was auch in vollständigem Einklang mit einer ähnlichen von Wood gezogenen Schlußfolgerung (vgl. Einleitung p. 584) steht.

2. Durch Versuche mit aus geradlinigen (rechteckigen) Resonatoren zusammengesetzten Gittern ist Schaefer<sup>2)</sup> zu dem Ergebnis gekommen, daß bei dichten Gittern die Schirmwirkungskurve sich ändert, wenn man die Abstände der Resonatoren ändert. Er setzt voraus, daß ein Maximum der Schirmwirkung stets eintritt, wenn die Eigenwellenlänge der Resonatoren mit der Wellenlänge der einfallenden Schwingungen übereinstimmt. Die bei der Zusammendrängung der Resonatoren eintretende Verschiebung des Maximums der Schirmwirkung führt er auf die veränderte Kapazität und wechselseitige Induktion der Gitterelemente zurück. Bei einem System von parallel nebeneinander liegenden Resonatoren hat er experimentell stets eine Verschiebung des Schirmwirkungsmaximums nach der Seite der *kleineren* Wellen hin gefunden. Um die erwähnten Anschauungen zu prüfen, machte ich einige Versuche mit aus geradlinigen Elementen zusammengesetzten Gittern, die vor der Öffnung *B* des vor dem Empfänger stehenden langen Rohres angeordnet wurden. Die Kurve I in Fig. 5 wurde mit einem aus sechs nebeneinander und parallel zur elektrischen Kraft orientierten geradlinigen Elementen bestehenden Gitter erhalten; der gegenseitige Abstand der benachbarten aus 13,0 cm langen und 0,7 mm dicken Kupferdrähten bestehenden Resonatoren betrug 5 cm. Das Maximum dieser Kurve ist in der Tat von dem mit einem einzelnen Resonator erhaltenen Schirmwirkungsmaximum (Kurve II in Fig. 2, p. 587, die in Fig. 5 als gestrichelt wiedergegeben ist)

1) Bei der benutzten Versuchsanordnung schwächten die vor der Mitte der Öffnung stehenden Kugeln die Strahlen etwas mehr als die seitlichen.

2) Cl. Schaefer, Ann. d. Phys. 16. p. 106. 1905.

bedeutend nach der Seite der kürzeren Wellen hin verschoben. Durch Versuche mit mehreren parallel nebeneinander liegenden „Sekundärerregern“ von gleicher Periode hatte ich früher<sup>1)</sup> gefunden, daß nur eine sehr enge Koppelung gleich langer Leiter eine Verschiebung der Eigenwellenlänge des Systems, und zwar nach den längeren Wellen hin, bewirkte. Da es mir deshalb als zweifelhaft erschien, ob die Verschiebung des Maximums der Kurve I in Fig. 5 auf einer entsprechenden Verkleinerung der Eigenperiode des Gitters beruhe, wiederholte ich die Durchlässigkeitsversuche mit einem Gitter, das sich von dem zuletzt benutzen nur darin unterschied, daß in die Mitte eines jeden der 13 cm langen Resonatoren ein 3 cm langer und nur 0,02 dicker Eisendraht eingeschaltet war. Ich

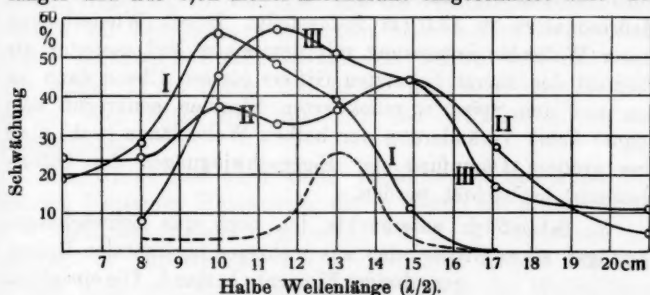


Fig. 5.

erhielt dann die Schirmwirkungskurve II in Fig. 5, welche zwei Maxima zeigt, von denen das höhere an derselben Stelle liegt, wie das von einem einzelnen Gitterelement erzeugte Absorptionsmaximum (Kurve III in Fig. 2). Das zweite und zugleich schwächere Maximum der Kurve II entspricht dagegen dem Maximum der Kurve I. Bei dem zuletzt benutzten Gitter war die durch die Eigenschwingungen bedingte sekundäre Ausstrahlung infolge der eingeschalteten dünnen Eisendrähte sehr schwach, so daß die durchgehenden Wellen verhältnismäßig wenig durch diese Sekundärstrahlung beeinflußt werden konnten. Die bei dem zuerst angewandten Gitter beobachtete Verschiebung des Absorptionsmaximums (Kurve I) dürfte demnach nicht von einer Veränderung der Eigenperiode,

1) K. F. Lindman, Ann. d. Phys. 40. p. 1016. 1913.

sondern von einer verhältnismäßig starken Sekundärstrahlung herrühren (durch die Sekundärstrahlung wirken auch die einzelnen Elemente dieses Gitters bedeutend stärker aufeinander ein als die des zweiten Gitters). Da die beiden Gitter sonst geometrisch gleich waren, kann die Verschiedenheit ihrer Absorptionskurven nicht aus Beugungen in dem gewöhnlichen Sinne dieses Wortes herrühren.<sup>1)</sup>

Daß in der Tat die Eigenperiode dieser Gitter von der eines einzelnen isolierten Elementes nicht merkbar abwich, konnte schließlich noch durch einen direkten Versuch nachgewiesen werden. Nach der von L. Boltzmann zuerst angegebenen Methode<sup>2)</sup> mit zwei verschiebbaren Metallsiegeln wurde zuerst die halbe Eigenwellenlänge eines geradlinigen Meßresonators zu 13,0 cm festgestellt. Durch Wiederholung dieser Wellenlängenmessung mit demselben Meßresonator als Element des zuerst benutzten Gitters (dessen Ebene dann zu den von den Spiegeln reflektierten Strahlen senkrecht war) konnte keine Veränderung der halben Wellenlänge (wohl aber eine größere Dämpfung der Eigenschwingungen der Gitterelemente) beobachtet werden.

3. Schließlich untersuchte ich noch das Schwächungsvermögen eines Gitters, das aus mehreren horizontalen Reihen geradliniger Elemente bestand. Die einzelnen, vertikal orientierten Gitterdrähte bestanden wieder aus 13 cm langen und 0,7 mm dicken Kupferdrähten, wobei der Abstand zweier benachbarter zu derselben horizontalen Reihe gehörender Drähte 7 cm war. Damit die Enden der Drähte nicht zu nahe aneinander sein würden, waren die Reihen so angeordnet, wie aus Fig. 6 hervorgeht, die einen Teil des

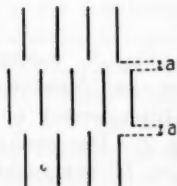


Fig. 6.

Gitters vorstellt. Der mit  $a$  bezeichnete Abstand betrug ca. 1 cm. Das Schwächungsvermögen dieses Gitters für verschieden lange

1) Die Entstehung der von Resonatoren ausgehenden „Sekundärwellen“ kann allerdings nach H. Poincaré durch eine vom Resonator bewirkte „Diffraction“ erklärt werden, die jedoch von der gewöhnlichen Diffraction sehr verschieden ist. (Vgl. meinen Aufsatz: „Über sekundäre elektrische Schwingungen“, Ann. d. Phys. 40. p. 994, Fußnote 4. 1913.)

2) J. Klemenčič u. P. Czermak, Wied. Ann. 50. p. 174. 1893.

Wellen wird durch die Kurve III in Fig. 5 dargestellt. Das Maximum dieser Kurve, das bei  $\lambda/2 = 11,5$  cm liegt, ist auch etwas, obwohl nicht so viel wie das der Kurve I, nach den kleineren Wellenlängen hin verschoben.

#### B. Reflexionsversuche.

1. Die Versuchsanordnung unterschied sich von der bei den Durchlässigkeitsversuchen benutzten hauptsächlich darin, daß das Rohr A in Fig. 1 (p. 585) jetzt nicht zur Verwendung kam. Der mit dem Trichter U versehene Empfänger war in der Nähe des Erregers so aufgestellt, daß bei Messung der an einem Gitter reflektierten Strahlung der Einfallswinkel und der Reflexionswinkel ca.  $13^\circ$  betragen und der elektrische Vektor der Wellen zur Einfallsebene senkrecht orientiert war. Die vom Gitter reflektierte Strahlungsintensität wurde stets mit dem von einem 71 cm hohen und 61 cm breiten ebenen Kupferspiegel total reflektierten verglichen und in Prozenten von ihr ausgedrückt.

Die Gitter bestanden wieder zunächst aus den früher benutzten kupfernen Hohlkugeln, die in sieben horizontalen und fünf vertikalen Reihen angeordnet waren. Je nachdem der Abstand der Mittelpunkte der benachbarten Kugeln bzw. 14, 9 oder 8 cm war, erhielt ich durch Variieren der Wellenlänge des Erregers und des auf ihn abgestimmten Empfängers die Kurven I, II und III in Fig. 7.<sup>1)</sup> *Das aus kugelförmigen Resonatoren zusammengesetzte Gitter zeigte also in jedem Falle ein deutliches, obwohl ziemlich flaches Reflexionsmaximum, und zwar verschob sich dieses Maximum mit zunehmender Verteilungsdichte der Resonatoren etwas nach der Seite der längeren Wellen hin.*<sup>2)</sup>

1) Eine Anordnung der Gitterelemente in sechs horizontalen und sechs vertikalen Reihen (quadratische Form des Gitters) veränderte die Reflexionskurven in keiner Weise. Die Beugungen an den Rändern des Gitters waren also ohne merklichen Einfluß.

2) Man könnte vielleicht dieses Ergebnis als ein Analogon zu den von Planck aus seiner elektromagnetischen Dispersionstheorie für die selektive Absorption des Lichtes in einem stark absorbierenden Medium gezogenen Schlußfolgerungen (vgl. oben p. 580) ansehen. Die Voraussetzungen der Planckschen Theorie (ausgesprochene Eigenperiode der Resonatoren, Abstand zweier benachbarter Resonatoren groß gegen die



Aus einem Vergleich der Kurven II und III mit den entsprechenden Schirmwirkungskurven I und II in Fig. 4 (p. 596) ergibt sich, daß das Maximum des Reflexionsvermögens mit dem des Schwächungsvermögens nicht zusammenfiel, sondern einer etwas kleineren Wellenlänge entsprach.

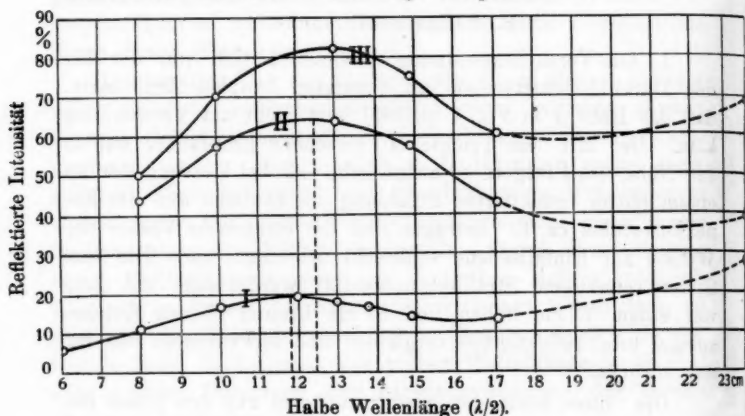


Fig. 7.

2. Da es denkbar war, daß die Lage der Reflexionsmaxima dadurch beeinflußt sei, daß der Einfallswinkel nicht gleich Null war, versuchte ich die Reflexion bei normaler Incidenz zu untersuchen. Zu diesem Zweck wurde eine große rektanguläre Scheibe aus 8 mm dickem Spiegelglas in vertikaler, um  $45^\circ$  gegen die primären Strahlen geneigter Stellung so aufgestellt, daß die durch diese Scheibe gegangenen Strahlen das Resonatorengritter senkrecht trafen und nach ihrer Zurückwerfung teilweise von derselben Scheibe seitwärts in den Empfängertrichter reflektiert wurden. Es gelang mir aber nicht, auf diese Weise eine genügend reine Wirkung zu erhalten. Die Reflexionsversuche wurden deshalb nach der früheren Methode bei einem größeren Einfallswinkel zum Teil wieder-

Lineardimensionen eines Resonators und klein gegen die im Medium fortschreitenden Wellen) waren allerdings bei keinem von den obigen Versuchen streng erfüllt. Bei den dichteren Gittern waren die Eigenschwingungen wahrscheinlich stärker gedämpft und wohl auch ein wenig langsamer als bei dem „lichten“ Gitter.



holt. Es zeigte sich dann bei Vergrößerung des Einfallswinkels von  $13^\circ$  zu  $25^\circ$ , daß das Reflexionsmaximum ihre Lage nicht merkbar änderte. Sowohl die Höhe dieses Maximums als auch die den größeren Wellenlängen entsprechenden Ordinaten der Reflexionskurve waren jedoch bei dem größeren Einfallswinkel etwas größer als bei dem kleineren. Je schiefer die Strahlen einfallen, um so „dichter“ erscheint in der Tat das Gitter in der Richtung dieser Strahlen, obwohl die Erscheinung andererseits dadurch kompliziert wird, daß bei schiefer Inzidenz die verschiedenen vertikalen Resonatorenreihen nicht gleichzeitig zum Schwingen erregt werden.<sup>1)</sup> Auch die Kurven II und III in Fig. 7 zeigen deutlich, daß mit zunehmender Verteilungsdichte der Resonatoren das Reflexionsvermögen für alle Wellen beträchtlich zunahm.<sup>2)</sup>

3. Nach den theoretischen Untersuchungen von Mie (vgl. Einleitung p. 582) würde bei einer isoliert gedachten Kugel vom Durchmesser 7 cm dem Maximum der diffus reflektierten Strahlung eine halbe Wellenlänge  $\lambda/2 = 10,8$  cm entsprechen (vgl. die Fußnote 2 auf p. 587). Da nun, wie wir gesehen haben, das Reflexionsmaximum bei einem aus kugelförmigen Elementen bestehenden Resonatorensystem sich mit zunehmender Verteilungsdichte der Resonatoren nach den längeren Wellen hin verschiebt, läßt sich auch die Abweichung, welche die mit dem lichtesten Gitter gefundene Lage des Reflexionsmaximums (Kurve I in Fig. 7),  $\lambda/2 = 11,8$  cm, von der des Mieschen Strahlungsmaximums zeigt, durch die Anhäufung mehrerer Resonatoren sehr gut erklären.

1) Mit Hilfe von Resonatoren-gittern dürfte es möglich sein, elektromagnetische Analoga zu den neuerdings entdeckten, durch Molekulargitter hervorgerufenen Interferenzerscheinungen der Röntgenstrahlen nachzuweisen.

2) Daß die beobachteten Reflexionsmaxima ein wenig höher als die entsprechenden Schirmwirkungsmaxima (Kurven I und II in Fig. 4) sind, dürfte auch zum Teil darauf beruhen, daß die Reflexion nicht bei normaler Inzidenz stattfand. Da die Versuchsanordnungen bei den Durchlässigkeits- und den Reflexionsversuchen einander nicht vollständig entsprachen, ist es zwecklos, auf die Höhendifferenz der erwähnten Kurven näher einzugehen. Man sieht jedoch, daß die Reflexionsmaxima sich oberhalb der übrigen Teile der Kurven etwas mehr erheben als die entsprechenden Schirmwirkungsmaxima. Eine eventuelle Ursache dazu wird später (p. 610) erwähnt.

Wie im voraus zu erwarten war, verlaufen die Reflexionsmaxima (Fig. 7) sehr flach. Berücksichtigt man nur denjenigen Anteil der an einer metallischen Kugel erregten Schwingung, welche vom Typus der ersten Eigenschwingung ist, so ergibt sich aus den Thomsonschen Formeln (vgl. p. 587), wie Pockels (l. c.) bemerkt hat, daß an den Grenzen des Intervalls von  $\lambda = \frac{2}{3}\lambda'$  bis  $\lambda = \frac{4}{3}\lambda'$ , wo  $\lambda'$  die der maximalen Resonanz entsprechende Wellenlänge ist, die Intensität der von der Kugel zerstreuten Wellen noch 0,5 bzw. 0,68 ihres Maximalwertes betrage. Dies stimmt nun in der Tat mit der Form der Kurve I in Fig. 7 sehr nahe überein. Es ist nämlich für  $\lambda/2 = 11,8$  cm die reflektierte Intensität = 20 Proz., während sie für  $\lambda/2 = \frac{2}{3} \times 11,8 = 7,9$  cm 11 Proz. und für  $\lambda/2 = \frac{4}{3} \times 11,8 = 15,7$  cm 13 oder  $0,65 \times 20$  Proz. beträgt. Auf ähnliche Weise ergibt sich, daß die Maxima der Kurven II und III noch flacher verlaufen als das der Kurve I.<sup>1)</sup>

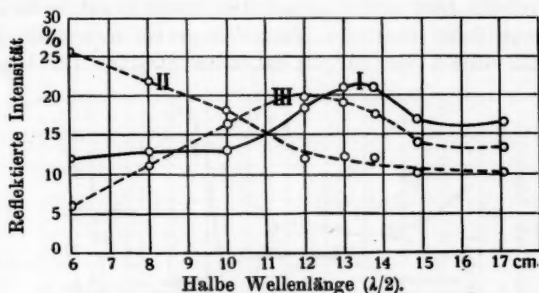
Der flache Verlauf der Reflexionsmaxima bestätigt den schon früher (p. 594) gezogenen Schluß, daß eine durch kugelförmige metallische Resonatoren bewirkte scharfe selektive Reflexion (bzw. Absorption) des Lichtes nicht möglich ist, daß aber sehr breite, durch Resonanz erzeugte Maxima vorkommen können.<sup>2)</sup>

4. Die bisher untersuchten, aus Metallkugeln bestehenden Gitter unterscheiden sich indessen von den entsprechenden „optischen Resonatoren“ (von Wood und Kossonogoff) darin, daß diese von auf Glas niedergeschlagenen Metallpartikelchen bestehen, während jene mit keinem Dielektrikum — mit Ausnahme der dünnen Holzträger — verbunden sind. Da es nun aber denkbar ist, daß das an der Glasfläche reflektierte

1) Nach der Kurve II ist für  $\lambda'/2 = 12,4$  cm die reflektierte Intensität = 64 Proz., während sie für  $\lambda/2 = \frac{2}{3} \times 12,4 = 8,3$  cm 45 oder  $0,70 \times 64$  Proz. und für  $\lambda/2 = \frac{4}{3} \times 12,4 = 16,5$  cm 46 oder  $0,72 \times 64$  Proz. beträgt. Das Maximum der Kurve III ist ungefähr ebenso flach wie das der Kurve II.

2) Um zu entscheiden, ob die oben (p. 589—592) beschriebenen, mit dielektrischen Kugeln gemachten Beobachtungen wirklich mit den Eigenschwingungen dieser Körper etwas zu tun haben, wäre es von Bedeutung gewesen, das Reflexionsvermögen von aus solchen Kugeln zusammengesetzten Gittern zu untersuchen. Ich hoffe solche Versuche bald ausführen zu können.

Licht mit dem an dem Metallniederschlag reflektierten interferieren könnte, wodurch schärfere Reflexionsmaxima würden erzeugt werden, untersuchte ich noch das Reflexionsvermögen eines Resonatorensystems, dessen kugelförmige Elemente sich unmittelbar vor einer  $70 \times 80$  cm weiten und 3 mm dicken ebenen Glasscheibe befanden. Die Kupferkugeln (dieselben wie bei den früheren Versuchen) waren dabei so verteilt, daß der gegenseitige Abstand der Mittelpunkte zweier benachbarter Kugeln = 14 cm war. Bei jeder Wellenlänge der auffallenden



Kurve I: Resonatorensystem mit Glaswand.

„ II: Glaswand ohne Resonatorensystem.

„ III: Resonatorensystem ohne Glaswand.

Fig. 8.

Strahlen wurden nicht nur die von diesem mit Glaswand versehenen Resonatorensystem reflektierte Intensität, sondern auch die von der Glaswand allein und die von dem Metallkugelsystem allein (ohne Glaswand) reflektierte Intensität gemessen und mit der von einem ebenen Kupferspiegel total reflektierten Strahlungsintensität verglichen bzw. in Prozenten von ihr ausgedrückt. Der Einfallswinkel und der Reflexionswinkel waren bei diesen Versuchen =  $12^\circ$ . Die Ergebnisse sind in Fig. 8 dargestellt. Wenn man die verschiedenen Kurven miteinander vergleicht, so findet man nun in der Tat eine deutliche, obwohl schwache Interferenzwirkung von der erwähnten Art. Das Maximum der Kurve I würde sich noch steiler erheben (von der linken Seite aus), falls nicht die Kurve II — wegen der Interferenz, die zwischen den an den beiden Oberflächen der Glasscheibe reflektierten elektrischen Wellen stattfand —

von der horizontalen Richtung abweichen würde. Es scheint demnach möglich, daß eine ähnliche und sogar noch etwas ausgeprägtere Wirkung (der zuerst erwähnten Art) des Glases auch bei den entsprechenden optischen Versuchen stattfinden könnte. Scharfe Absorptionsstreifen dürften aber doch kaum auf diese Weise erzeugt werden können.

5. Ich versuchte noch und zwar auf eine andere Weise, eine Interferenz zwischen den von einem Resonatorengritter und dem von einem hinter ihm befindlichen *Metallspiegel* zurückgeworfenen Strahlen nachzuweisen. Der früher benutzte Kupferspiegel war dabei in unveränderter Lage so aufgestellt, daß der Einfallswinkel der auf ihn fallenden Strahlen  $12^\circ$  betrug,

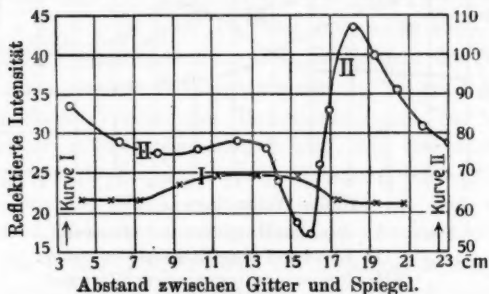


Fig. 9.

während das zu ihm parallele Resonatorengritter in verschiedene Entfernungen vor ihm gebracht wurde. Die Intensität des resultierenden reflektierten Strahlenbündels wurde auf gewöhnliche Weise mit dem mit Empfängertrichter versehenen Meßresonator gemessen. Die halbe Eigenwellenlänge des Erregers und des mit ihm isochronen Meßresonators war unverändert = 13 cm. Das vorher erwähnte, aus Kupferkugeln bestehende „lichte“ Gitter gab auf diese Weise die Kurve I in Fig. 9, während die Kurve II mit dem auf p. 600 beschriebenen, aus geradlinigen 13 cm langen Kupferdrähten bestehenden Gitter erhalten wurde.

6. Um die Maxima und Minima dieser Kurven deuten zu können und um außerdem einen Einblick in die von den „Sekundärwellen“ bei den früher beschriebenen Durchlässigkeitsversuchen ausgeübte Wirkung zu gewinnen, war es nötig,

die Phasenverzögerung der elektrischen Wellen bei ihrer Reflexion an Resonatorengrittern zu kennen. Durch Interferenzversuche nach der Boltzmannschen Anordnung mit zwei verschiebbaren Spiegeln konnte die Phasenänderung bei der Reflexion an einem ebenen Resonatorensystem mit der bei der Reflexion an einem ebenen Metallspiegel (die bekanntlich  $= \pi$  ist) verglichen werden, wenn bei dieser Versuchsanordnung der eine verschiebbare Spiegel durch das Resonatorengritter ersetzt wurde. Durch Parallelverschiebung des Resonatorengritters in der Richtung nach hinten (im Verhältnis zum Erreger) von dem neben ihm stehenden festen Metallspiegel und

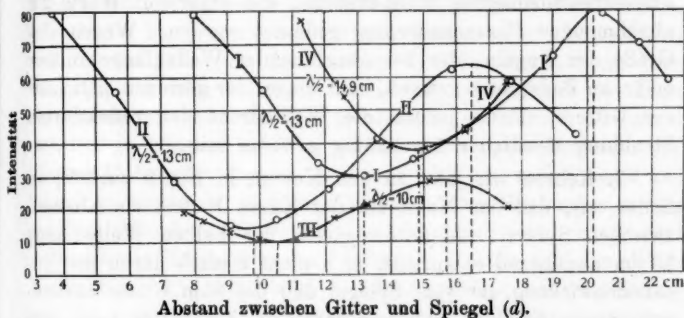


Fig. 10.

Messung der resultierenden reflektierten Intensität erhielt ich, als die halbe Wellenlänge der Wellen  $= 13$  cm war, die Interferenzkurven I und II in Fig. 10, von denen jene sich auf das vorher benutzte Kugelresonatorensystem und diese sich auf das Drahtgitter bezieht. Unter dem Abstände zwischen dem Kugelgitter und dem feststehenden Spiegel wird dabei der Abstand zwischen der Spiegelebene und der durch die Kugelmittelpunkte gelegten Ebene verstanden. Wenn man den Einfallswinkel mit  $\alpha$  und den gegenseitigen Abstand des Spiegels und des Resonatorensystems mit  $d$  bezeichnet, so beträgt der Gangunterschied der interferierenden Strahlenbündel  $2d \cos \alpha$ . Da bei diesen Versuchen  $\alpha = 12^\circ$  und  $\lambda/2 = 13$  cm waren, ergibt sich aus den Kurven I und II in Fig. 10, daß die Phasenänderung der elektrischen Kraft bei der Reflexion an dem mit den Wellen annähernd isochronen Kugelgitter sich kaum

von 0 (oder  $2\pi$ ) unterscheiden konnte, während sie bei dem Drahtgitter angenähert  $= \pi/2$  war.<sup>1)</sup> Auch wenn die halbe Wellenlänge der einfallenden Wellen 10,0 cm bzw. 14,9 cm war, so war, wie die Kurven III und IV in Fig. 10 zeigen, die von dem Kugelgitter bewirkte Phasenänderung sehr nahe gleich Null (oder eventuell  $2\pi$ ). Ob bei wachsender Wellenlänge, wie die Lage des Minimums der Kurve IV anzudeuten scheint, eine merkbare Phasenverzögerung allmählich eintrat, mag hier unentschieden bleiben. Daß das Maximum der Kurve III bei  $\lambda/2 = 10,5$  cm und nicht bei  $\lambda/2 = 10$  cm (oder eigentlich 10,1 cm) liegt, könnte vielleicht als ein Zeichen von einer Phasenbeschleunigung (oder eventuell von einer vom Werte  $2\pi$  abnehmenden Phasenänderung) gedeutet werden. Wegen der Größe der Kugeln, die bei abnehmender Wellenlänge immer mehr an Bedeutung gewann, und wegen der geringen „Dichte“ des Gitters, dürfte jedoch die Wellenfront der reflektierten Strahlung ziemlich unregelmäßig gewesen sein.

7. Kehren wir jetzt zu den Kurven in Fig. 9 zurück, so finden wir, daß das Maximum der Kurve I, dem ein Abstand zwischen Spiegel und Gitter gleich der halben Wellenlänge 13 cm annähernd entspricht, sich nicht einfach durch die Zusammenwirkung der vom Spiegel und der vom Gitter zurückgeworfenen Strahlen erklären läßt, da bei dieser Lage des

1) Wenn man den Abstand zwischen Kugelgitter und Spiegel von der vorderen Tangentialfläche der Kugeln rechnen würde — was allerdings nicht als plausibel erscheint, da die Kugeln als Emissionszentra für die reflektierten Strahlen aufgefaßt werden müssen — so würde man für die Phasenänderung am Kugelgitter auch den Wert  $\pi/2$  erhalten. Für die durch die Umwandlung primärer Wellen in Sekundärwellen bedingte Phasenänderung habe ich früher (Ann. d. Phys. 7. p. 886. 1902) im Falle eines geradlinigen mit den Primärwellen isochronen Sekundärleiters einen Wert  $= \frac{3}{4}\pi$  gefunden. Es wirkten nämlich zwei in der Nähe voneinander befindliche isochrone Resonatoren so aufeinander ein, als ob diese Phasenvergrößerung in Abständen vom Sekundärreger, die von der Größenordnung einer halben Wellenlänge waren, einen Mittelwert von  $\frac{3}{4}\pi$  hätte. „Mit abnehmendem Abstände vom Sekundärreger schien diese Größe sich aber dem Werte  $\pi$ , mit wachsendem Abstände einem kleineren Werte, eventuell  $\pi/2$ , zu nähern.“ Bei einem Gitter, das aus vielen einander beeinflussenden Elementen besteht, braucht übrigens die Phasenänderung nicht notwendig gleich der von einem isolierten Elemente bewirkten Phasenänderung zu sein.

Gitters die Phasendifferenz der beiden reflektierten Strahlenbündel  $= 3\pi$  wäre, infolgedessen sie im Gegenteil einander schwächen müßten. Nun wirken aber die Kugeln bei jeder Lage des Gitters sehr stark zerstreuer auf die sie treffenden Strahlen, wodurch das in den Empfängertrichter gelangende Strahlenbündel stets geschwächt wird. Beim Abstände 13 cm vom Spiegel befindet sich das Resonatorensystem annähernd in einem Knoten der stehenden Wellen, welche durch die am Spiegel stattfindenden (allerdings nicht ganz senkrechten) Reflexion der primären Wellen entstanden sind. Die durch Zerstreuung bewirkte Schwächung ist hier geringer, als wenn das Gitter sich in einem Bauch der stehenden Wellen befände. Durch das bei jedem Abstände vom Spiegel stattfindende Überwiegen der durch die Zerstreuung bewirkte Schwächung über die zuerst erwähnte Interferenzwirkung scheint mir die Lage des übrigens sehr flachen Maximums der Kurve I erklärt werden zu können. — Was wieder das scharfe Minimum der Kurve II betrifft, das im Abstände 15,8 cm vom Spiegel beobachtet wurde, so läßt sich dies als eine Wirkung der von den drahtförmigen Gitterelementen ausgehenden und vom Spiegel reflektierten Sekundärwellen erklären. Da nämlich dem Wegunterschiede  $2 \times 15,8 / \cos 12^\circ = 32,4$  cm eine Phasenverzögerung von  $2\frac{1}{2}\pi$  entspricht, wirken diese Wellen auf die in den Gitterelementen durch die Primärwellen erregten, noch bestehenden Schwingungen mit der relativen Phasenverzögerung  $\pi/2 + 2\frac{1}{2}\pi + \pi = 4\pi$  und verstärken also diese Schwingungen und folglich auch die von den Gitterelementen emittierten Sekundärwellen. Zwischen den vom Spiegel reflektierten Primärwellen und den soeben erwähnten Sekundärwellen (die sich an der vorderen Seite des Gitters zu der von ihm selektiv reflektierten Strahlung zusammensetzen) besteht nun die Phasendifferenz  $(2\frac{1}{2}\pi + \pi) - (\pi/2) = 3\pi$ , welche das Minimum der Kurve II erklärt. Auch das Maximum dieser Kurve beim Abstände 18 cm vom Spiegel läßt sich durch das Zusammenwirken der primären und sekundären Wellen erklären. Bei dem Drahtgitter waren die Elemente viel dichter angeordnet als bei dem Kugelgitter und außerdem hatten sie in jenem Falle eine ausgesprochenere Eigenperiode. Die verschiedene Gestalt der Kurven I und II in Fig. 9 wird hierdurch erklärlich.



8. Bei der Erörterung der Durchlässigkeitsversuche wurde auf einige Eigentümlichkeiten in der Form der erhaltenen Schirmwirkungskurven hingewiesen, die nun, wie es scheint, auf eine Einwirkung der von den Resonatoren ausgehenden Sekundärwellen zurückgeführt werden können. Zuerst ist die bei der Abszisse  $\lambda/2 = 13$  cm vorkommende Einbiegung der Kurven I und II in Fig. 4 (p. 596) leicht zu verstehen, wenn man beachtet, daß nach der auf p. 607 beschriebenen Versuchen die von dem Kugelgitter ausgehenden „Sekundärwellen“ mit den durchgelassenen 26 cm langen Primärwellen mit einer von 0 (oder  $2\pi$ ) kaum abweichenden Phasendifferenz im Meßresonator interferierten. Diese Einbiegungen haben zur Folge, daß die Schirmwirkungsmaxima nicht mit den Reflexionsmaxima zusammenfallen, sondern im Verhältnis zu diesen nach den längeren Wellen hin verschoben werden. Daß für  $\lambda < \lambda_0$  ( $\lambda_0$  = die Eigenwellenlänge der Kugeln) das Reflexionsvermögen der Kugelgitter bei abnehmender Länge ( $\lambda$ ) der einfallenden Wellen rascher sank wie das Schwächungsvermögen (vgl. die Kurven in Fig. 4, p. 596 und Fig. 7, p. 602, sowie die Fußnote 2, p. 603) läßt sich wenigstens zum Teil dadurch erklären, daß bei den Durchlässigkeitsversuchen die Phasendifferenz zwischen den von den durchgelassenen Primärwellen und den von den „Sekundärwellen“ im Meßresonator erregten Schwingungen mit abnehmender Wellenlänge bald einen so großen Wert erreichte, daß diese Schwingungen einander schwächten. Die Verschiebung der Maxima der Kurven I und III in Fig. 5 (p. 599) nach der Seite der kürzeren Wellen hin läßt sich ebenfalls dadurch erklären, daß die von den gerädlinigen Gitterelementen ausgehenden „Sekundärwellen“ nur um ca.  $\pi/2$  gegen die durchgelassenen Primärwellen verzögert waren, wenn diese Wellen mit den Eigenschwingungen der Gitterelemente isochron waren. Bei abnehmender Länge der primären Wellen und unverändertem Resonatorensystem näherte sich nämlich, wie ich durch besondere Versuche feststellte, die erwähnte Phasendifferenz schnell dem Werte  $\pi$ .

Daß auch bei dem aus 13 cm langen Kupferdrähten bestehenden Gitter das Reflexionsmaximum an einer anderen Stelle als das Schirmwirkungsmaximum liegt, geht aus Fig. 11 hervor, wo die Kurve I das Reflexionsmaximum dieses Gitters



für verschieden lange Wellen darstellt und die gestrichelte Kurve II mit der für dasselbe Gitter früher erhaltenen Schirmwirkungskurve III in Fig. 5 identisch ist. Man erhält beinahe den Eindruck, als ob die Kurve II durch eine schiefe Abstimmung der Erhebung der Kurve I entstanden wäre.

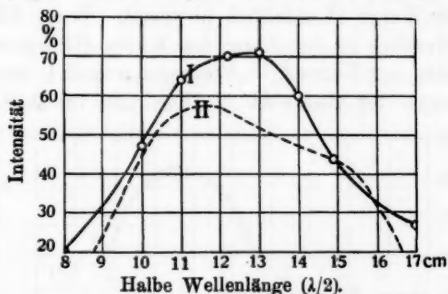


Fig. 11.

Das selektive Reflexionsvermögen eines Gitters kann nach diesen Versuchen nicht ganz einwandfrei durch bloße Durchlässigkeitsversuche bestimmt werden. Von der auf das Gitter senkrecht auffallenden ebenen Welle pflanzt sich allerdings ein Teil in unveränderter Richtung fort, während ein zweiter Teil in normaler Richtung reflektiert wird. Diese beiden Teile sind indessen nicht ganz komplementär, weil ja ein Teil der auffallenden Strahlungsenergie sich auch durch Beugungen in verschiedenen anderen Richtungen (auch im Gitter selbst) zerstreut wird.

9. Durch Resonanzversuche habe ich schließlich die von dem Kugelgitter reflektierte Strahlung in einem Falle zu analysieren versucht, wo die (bei einem Einfallswinkel von  $12^\circ$ ) einfallenden Wellen mit den Eigenschwingungen der Gitterelemente nicht isochron waren. Als die halbe Wellenlänge der primären Strahlen unverändert = ca. 16,5 cm war und der Abstand der Mittelpunkte der benachbarten Kupferkugeln 9 cm betrug, erhielt ich durch Variieren der Eigenperiode des Meßresonators die Kurve I in Fig. 12. An und für sich zeigt diese Kurve keinen merkbaren Einfluß von den Eigenschwingungen der Kugeln, sondern nur ein ausgeprägtes, der Eigenperiode des Erregers entsprechendes Maximum. Wenn man

sie aber mit der Resonanzkurve II vergleicht, welche durch eine gleichzeitige Untersuchung der an einem ebenen Kupferspiegel unter ganz gleichen Verhältnissen reflektierten Primärwellen erhalten wurde, so findet man jedoch, daß die Kurve I mit Bezug auf ihre Form in der Umgebung von  $\lambda/2 = 12$  cm von der der Kurve II merklich abweicht. Diese Abweichung tritt sehr deutlich in der Form der Kurve III hervor, welche die Ordinaten der Kurve I in Prozenten von den entsprechenden Ordinaten der Kurve II als Funktion von  $\lambda/2$  darstellt.

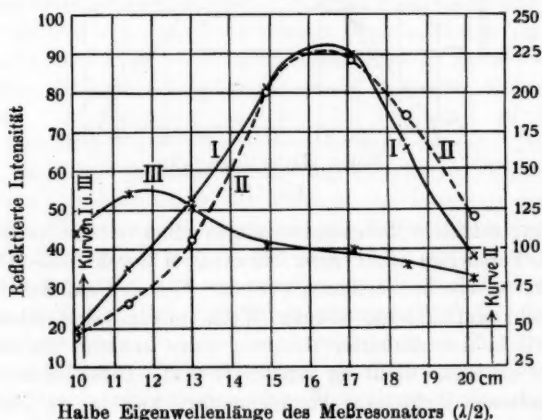


Fig. 12.

Das bei  $\lambda/2 = 12$  cm vorkommende Maximum dieser Kurve, dem das Maximum der Kurve II in Fig. 7 (p. 602) annähernd entspricht, zeigt, daß unter den unendlich vielen Schwingungskomponenten, in welche die gedämpfte primäre Strahlung nach dem Fourierschen Theorem zerlegt werden konnte, die den Eigenschwingungen der Gitterelemente entsprechenden im Verhältnis zu ihrer ursprünglichen Intensität am stärksten reflektiert wurden. Da nun die selektive Reflexion sich stets als ein Emissionsvorgang auffassen läßt, so kann diese mit den Eigenschwingungen der Kugeln annähernd isochrone Strahlung als eine *Eigenstrahlung* (oder *Fluoreszenzstrahlung*) bezeichnet werden, während die unter Beibehaltung ihrer ursprünglichen Periode zerstreute Strahlung, die bei dem Kugulgitter die bei weitem stärkere war, als ein

durch die Primärstrahlung hervorgerufenen *erzwungenen Mitschwingen* gedeutet werden kann.

Mit dem aus 13 cm langen *geradlinigen* Resonatoren bestehenden Gitter erhielt ich die in Fig. 13 aufgetragenen Kurven, welche eine analoge Bedeutung wie die gleich benannten in Fig. 12 haben. Die Kurve I hat wieder nur ein den erzwungenen Schwingungen entsprechendes Maximum, welches jedoch ein wenig gegen die den Eigenschwingungen der Resonatoren entsprechende Wellenlänge verschoben ist. Wie bei dem Kugelgitter war demnach auch bei diesem Gitter

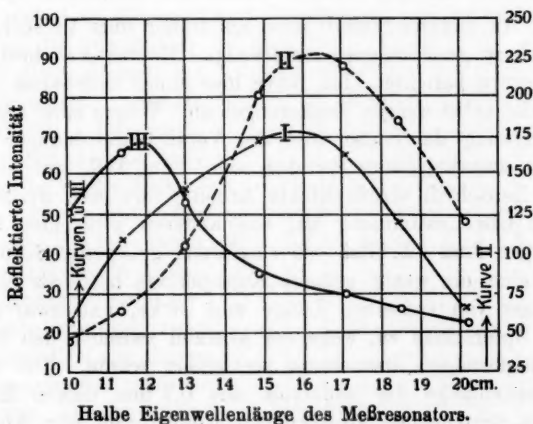


Fig. 13.

die erzwungene oder „zerstreute“ Strahlung die dominierende. Aus der Schärfe des Maximums der Kurve III ergibt sich, wenn man es mit dem Maximum der Kurve III in Fig. 12 vergleicht, daß die Eigenstrahlung der aus geradlinigen Elementen bestehenden Gitters durch schwächer gedämpfte Schwingungen erzeugt war, als die des Kugelgitters. Das größere Reflexionsvermögen jenes Gitters beruht zum Teil auf der etwas größeren Verteilungsdichte seiner Elemente. Bei einem größeren Unterschiede zwischen den Perioden der beiden Strahlungskomponenten erzeugt die Eigenstrahlung, wie ich durch einen besonderen Versuch (Länge der Gitterdrähte = 10 cm, Länge der einfachen

Wellen wie vorher) festgestellt habe, ein zweites, ihr entsprechendes Maximum der Kurve I.

Auf die Zergliederung der von Resonatoren gittern ausgehenden „Sekundärstrahlung“ in die beiden oben genannten Komponenten komme ich noch später (p. 619) zurück. Es mag hier nur bemerkt werden, daß es mit Hilfe von genügend fein geteilten Spiegeln vielleicht möglich sein würde, aus dem Energiespektrum eines Hertzschen Erregers Wellenlängen, die nur Bruchteile von 1 mm betragen, auszusondern.

#### Versuche mit aus ringförmigen Resonatoren bestehenden Gittern.

1. An anderer Stelle<sup>1)</sup> habe ich früher über Versuche mit aus nahezu geschlossenen ringförmigen Resonatoren bestehenden Gittern berichtet. Ich führe hier einige Ergebnisse dieser Versuche nebst einigen Ergänzungen an. Wegen einer näheren Beschreibung der Gitter und der Versuchsanordnungen mag auf die ursprünglichen Berichte oder, zum Teil, auf eine in dieser Zeitschrift veröffentlichte Arbeit<sup>2)</sup> verwiesen werden.

In Übereinstimmung mit von anderen gemachten Beobachtungen fand ich, daß ein ringförmig gebogener Sekundärleiter eine ein wenig größere Eigenperiode hatte als ein geradliniger von derselben Länge und Dicke, und zwar nahm dieser Unterschied zu, wenn der Abstand zwischen den Enden des ringförmigen Resonators verkleinert wurde. Die halbe Eigenwellenlänge der benutzten aus 0,7 mm dicken Metalldrähten bestehenden ringförmigen Resonatoren (der Abstand zwischen ihren Enden betrug ca. 3 mm) war also stets ein wenig größer als die Länge der Drähte.

Wenn bei einem aus gleichen ringförmigen Resonatoren bestehenden ebenen Gitter der Abstand der Mittelpunkte der benachbarten Elemente von der Größenordnung der halben Eigenwellenlänge dieser Elemente (oder sogar noch etwas kleiner) war, so war die Eigenperiode der Gitterelemente kaum merkbar größer als die eines gleichen, isoliert stehenden Elementes.

Als Erreger und Empfänger aufeinander abgestimmt

1) K. F. Lindman, *Finaka Vet. Soc. Öfvers.* 52. 1909—1910 und 53. 1910—1911.

2) K. F. Lindman, *Ann. d. Phys.* 42. p. 30. 1913.

waren und eine unveränderte Schwingungsperiode hatten, während beim Durchgang der Wellen durch ein zwischen ihnen befindliches Gitter der soeben erwähnten Art die Eigenperiode der Gitterelemente variiert wurde, schwächte (bei genügender Abblendung der Randstrahlen) das Gitter stets die durchgehende Strahlung, und zwar wurde die maximale Schwächung von einem Gitter ausgeübt, dessen Eigenperiode ein wenig (aber auch nur sehr wenig) größer als die der durchgehenden Wellen war. Wenn bei unverändertem Gitter (Länge der ringförmigen Gitterdrähte = 13 cm) die Periode der durchgehenden Wellen unter Beibehaltung des Isochronismus zwischen Erreger und Empfänger variiert wurde, so wurden die durchgehenden Wellen auch stets geschwächt (vgl. Kurve III in Fig. 14). Der maximalen Schwächung entsprach dann eine Wellenlänge der auffallenden Strahlen, die ein wenig kleiner als die der Eigenschwingungen der Gitterelemente war, und zwar stimmte die Lage dieses Maximums der Schirmwirkung, mit der beim Variieren der Gitterperiode beobachteten Lage des Maximums vollständig überein.

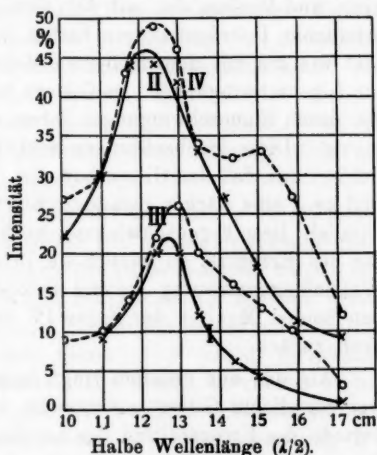


Fig. 14.

Dem Maximum des Schwächungsvermögens eines möglichst dichten, unveränderten Gitters (Kurve IV in Fig. 14) entsprach eine Länge der einfallenden Wellen, die etwas kleiner als die Eigenwellenlänge der als isoliert gedachten Gitterelemente war, und zwar lag dieses Maximum noch etwas mehr auf der Seite der kleineren Wellen als bei einem weniger dichten, aus gleichen Elementen bestehenden Gitter. Außer diesem Maximum trat aber noch ein zweites flacheres und niedrigeres Maximum bei einer etwas größeren Wellenlänge auf (vgl. Kurve IV). Ich glaubte

damals, das Auftreten dieser beiden Maxima darauf zurückführen zu können, daß das sehr dichte Gitter, dessen Elemente einander unsymmetrisch beeinflussten, zwei Eigenperioden hätte, von denen die eine größer, die andere ein wenig kleiner als die freie Eigenperiode der Elemente wäre. Durch eine später vorgenommene Messung der Eigenwellenlänge des Gitters nach der Boltzmannschen Methode mit zwei verschiebbaren ebenen Metallspiegeln, wobei der in diesem Falle ringförmig gebogene Meßresonator ein Element eines ganz dichten Gitters bildete, erhielt ich aber eine ganz regelmäßige Interferenzkurve, die nur *eine* Eigenperiode des Gitters erkennen ließ, die von der des isolierten Meßresonators nicht merkbar abwich. Die Maxima und Minima der mit dem Gitter auf die erwähnte Weise erhaltenen Interferenzkurve hatten jedoch einen flacheren Verlauf wie die mit dem isolierten Meßresonator erhaltenen, d. h. die Eigenschwingungen des Gitters waren stärker gedämpft als die freien Eigenschwingungen ihrer (als isoliert gedachten) Elemente. Diese Beobachtungen schließen jedoch nicht die Möglichkeit aus, daß das Gitter (bzw. die Gitterelemente) eine zweite, und zwar eine stärker gedämpfte Eigenschwingung hätte. Würde nämlich diese Eigenschwingung noch stärker gedämpft sein als die des Erregers, so könnte sie sich nicht bei der erwähnten Wellenlängenmessung geltend machen.<sup>1)</sup> Auf die Frage von den beiden Maxima der Kurve IV in Fig. 14 komme ich unten noch zurück.

Als das aus gleichen ringförmigen Elementen bestehende weniger dichte Gitter unverändert blieb, während die Eigenperiode des Erregers und des auf ihn stets abgestimmten Empfängers variiert wurde, so wurden bei einem kleinen Einfallsbzw. Reflexionswinkel (ca.  $11^\circ$ ) diejenigen Wellen am stärksten *reflektiert*, deren Periode ein wenig kleiner als die der Gitterelemente war (vgl. Kurve I in Fig. 14). Die Lage dieses Reflexionsmaximums stimmte nicht ganz mit der des Maxi-

---

1) Nach einer theoretischen Untersuchung von Hrn. C. W. Oseen (Arkiv för mat., astr. och fysik 9. Nr. 28. 1914) muß in der Tat ein dünner, vollkommen leitender Ring außer den von Pocklington und Lord Rayleigh untersuchten schwach gedämpften Eigenschwingungen noch ein stark gedämpftes Spektrum besitzen.

mums der Schirmwirkung überein, sondern war ein wenig mehr nach der Seite der kleineren Wellen hin verschoben. Das Maximum des Reflexionsvermögens eines ganz dichten Gitters (Kurve II in Fig. 14) war noch etwas mehr nach der Seite der kürzeren Wellen hin verschoben als das soeben betrachtete Reflexionsmaximum. Außer diesem Maximum trat kein zweites Reflexionsmaximum auf. Aus Versuchen bei etwas größeren Einfallswinkeln konnte der Schluß gezogen werden, daß das Reflexionsmaximum bei senkrechter Inzidenz annähernd mit dem bei einem Einfallswinkel von etwa  $11^\circ$  beobachteten übereinstimmen mußte.

Als Erreger und Empfänger unverändert, aber miteinander nicht isochron waren, während die Periode des weniger dichten Gitters variiert wurde, so richtete sich die Lage des Reflexionsmaximums und ebenso die des Schirmwirkungsmaximums (bei den Durchlässigkeitsversuchen) in erster Linie nach der Periode des Empfängers, mit der sie jedoch nicht vollständig übereinstimmte, indem sie im allgemeinen etwas nach der Seite der Periode des Erregers verschoben war.

Ein aus 13 cm langen und 0,7 mm dicken ringförmigen Kupferdrähten bestehendes Gitter ließ die elektrischen Wellen, die mit den Eigenschwingungen der Gitterelemente nahezu isochron waren, besser durch und reflektierte sie zugleich besser als ein gleiches aus eisernen Elementen bestehendes Gitter, wobei es sich zeigte, daß dieser Unterschied hauptsächlich von der Magnetisierbarkeit des Eisens herrührte. Über diese Versuche, deren soeben erwähntes Ergebnis, wie Hr. Oseen<sup>1)</sup> später gezeigt hat, in Übereinstimmung mit der Maxwell'schen Theorie steht, habe ich früher<sup>2)</sup> ausführlicher berichtet.

Für die Phasenänderung, welche die elektrische Kraft der Hertz'schen Wellen bei ihrer Reflexion an ebenen, aus ringförmigen Elementen bestehenden Gittern erlitt, fand ich den Wert  $\pi$ , wenn die Gitterelemente mit den einfallenden Wellen angenähert isochron waren. In anderen Fällen war sie aber  $< \text{oder} > \pi$ , je nachdem die Eigenperiode der Gitterelemente

1) C. W. Oseen, *Physik. Zeitschr.* 14. p. 1222. 1913.

2) K. F. Lindman, *Ann. d. Phys.* 42. p. 30. 1913.



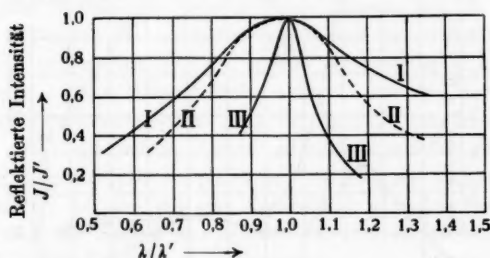
< oder > als die Periode der einfallenden Wellen war, und zwar nahm bei Veränderung der Eigenperiode des Gitters diese Abweichung vom Werte  $\pi$  in jenem Falle schneller zu als in diesem.

Mit Kenntnis dieser Phasenänderung kann man nun die Abweichung, welche die Schirmwirkungskurven III und IV in Fig. 14 bezüglich ihrer Form von den entsprechenden Reflexionskurven I und II zeigen, als eine Wirkung der von den Gitterelementen ausgehenden „Sekundärwellen“ wenigstens teilweise erklären. Bei einem aus 13 cm langen Drähten bestehenden Gitter, dessen Elemente nicht ganz dicht angeordnet waren, entsprach nach der Kurve III dem maximalen Schwächungsvermögen eine halbe Wellenlänge von 13 cm, welches damit übereinstimmt, daß die Sekundärwellen, die in diesem Falle gegen die primären um eine halbe Wellenlänge verzögert waren, dann die größte Schwächung erzeugen mußten. Die halbe Eigenwellenlänge der 13 cm langen ringförmigen Resonatoren war, streng genommen, um einige Millimeter größer als 13 cm. Das Maximum der Kurve III war also eigentlich ein wenig nach links verschoben. Auch diese Verschiebung ist leicht erklärlich, wenn man bedenkt, daß nach der Kurve I die intensivsten „Sekundärwellen“ eine etwas kleinere Periode hatten als die Eigenperiode des Gitters. Das Maximum der Schirmwirkung wird also in der Tat etwas, aber nicht so viel wie das Reflexionsmaximum, nach der Seite der kleineren Wellen hin verschoben sein. Die Einbiegung und die darauf folgende Ausbiegung des rechten Zweiges der Kurve III ist auch verständlich, wenn man die mit wachsender Periode erfolgende, erst sehr schnelle und dann langsamere Abnahme der Intensität und der Phasenverzögerung der Sekundärwellen berücksichtigt. Die soeben erwähnten charakteristischen Eigenschaften der Kurve III sind bei der Kurve IV in noch ausgeprägterer Weise vorhanden, was ja auch zu erwarten ist, weil die „Sekundärwellen“ sich bei einem dichten Gitter viel besser zu resultierenden ebenen Wellen zusammensetzen als bei einem lichten Gitter. Die starke Ausbiegung des rechten Zweiges der Kurve IV kann also vielleicht auf diese Weise erklärt werden. Daß die Maxima (Hauptmaxima) der Kurven II und IV etwas mehr nach links verschoben sind



als die entsprechenden der Kurven I und III, hängt wahrscheinlich damit zusammen, daß mit zunehmender Verteilungsdichte der Gitterelemente die Dämpfung der Eigenschwingungen des Gitters zunimmt, wobei das Strahlungsmaximum sich von der dem Isochronismus entsprechenden Lage immer mehr entfernt. Auf dieser größeren Dämpfung dürfte auch die weniger scharfe Form der erwähnten Maxima der Kurven II u. IV beruhen.

2. Ein Vergleich der in Fig. 15 aufgetragenen Kurven<sup>1)</sup> miteinander läßt deutlich erkennen, daß das selektive Reflexionsvermögen bei dem aus ringförmigen Elementen bestehenden (verhältnismäßig lichten) Gitter viel schärfer war als bei dem aus



Kurve I: Kugelgitter (Kurve I in Fig. 7).

„ II: ausgeradlinig. Resonatoren bestehendes Gitter (Kurve I in Fig. 11).

„ III: aus ringförmig. Elementen bestehendes Gitter (Kurve I in Fig. 14).

Fig. 15.

geradlinigen Elementen bestehenden, und bei diesem wieder schärfer als bei dem (lichten) Kugelgitter. Je ausgesprochener die Eigenperiode eines Gitters ist, um so schärfer müssen ja in der Tat seine selektiven Eigenschaften ausgebildet sein. Daß das Maximum der Kurve II doch sogar unerwartet flach verläuft, dürfte auf den gegenseitigen dämpfenden Induktionswirkungen der geradlinigen Gitterdrähte beruhen.

1) Die Kurven sind hier des Vergleiches halber auf dieselbe maximale Ordinate und dieselbe ihr entsprechende Abszisse reduziert worden. Es bedeuten  $\lambda'$  die dem Reflexionsmaximum entsprechende Wellenlänge und  $J'$  die ursprüngliche Ordinate dieses Maximums.

3. Auf ähnliche Weise wie bei den Versuchen mit den aus Kugeln oder geradlinigen Drähten bestehenden Gittern (p. 611—613) konnte auch bei Verwendung eines aus ringförmigen Elementen bestehenden Gitters durch Resonanzversuche nachgewiesen werden, daß die an diesem Gitter reflektierte Strahlung sich aus zwei Teilen zusammensetzte, nämlich aus einer Eigenstrahlung und einer erzwungenen Strahlung, und zwar trat diese zusammengesetzte Natur der Strahlung bei dem zuletzt erwähnten Gitter viel deutlicher hervor als bei jenen Gittern. Als

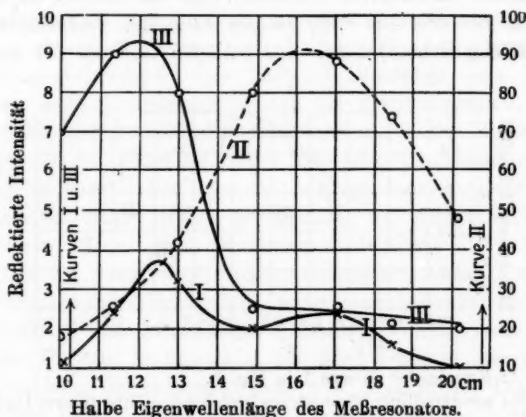


Fig. 16.

das Gitter aus 12,5 cm langen und 0,7 mm dicken ringförmigen Kupferdrähten bestand (der Abstand der Mittelpunkte der benachbarten Gitterelemente war = 10 cm) und die Wellenlänge der (unter  $12^\circ$  einfallenden) primären Strahlen unverändert = ca. 16,5 cm war, erhielt ich durch Variieren der Länge des (geradlinigen) Meßresonators die Resonanzkurve I in Fig. 16. Die Kurve II ist mit der gleichbenannten Kurve in Fig. 12, p. 612, identisch (sie ist also die mit den primären, an einem ebenen Kupferspiegel reflektierten Wellen erhaltene Resonanzkurve), während die Kurve III (wie die entsprechende in Fig. 12) die Ordinaten der Kurve II in Prozenten der entsprechenden Ordinaten der Kurve I angibt. Die Kurve I zeigt schon allein für sich sehr

deutlich die erwähnte Zusammensetzung der am Gitter reflektierten Strahlung, und zwar ergibt sich, daß die *Eigenstrahlung* ( $\lambda/2 = \text{ca. } 12,5 \text{ cm}$ ) jetzt die dominierende Rolle spielte. Die reflektierte Intensität war allerdings jetzt viel geringer als bei dem Kugelgitter, aber während das Maximum der Kurve III in Fig. 12 sich nur wenig oberhalb der übrigen Teile dieser Kurve erhebt, ist die Ordinate des bei  $\lambda/2 = 12,5 \text{ cm}$  liegenden Maximums der entsprechenden Kurve in Fig. 16 etwa viermal so groß wie die der erzwungenen Schwingung entsprechende Ordinate ( $\lambda/2 = 16,5 \text{ cm}$ ). Aus der relativen Schärfe der beiden Maxima der Kurve I in Fig. 16 ergibt sich ferner, daß die *Eigenstrahlung* des aus ringförmigen Elementen bestehenden Gitters eine bei weitem ausgesprochenere Periode hatte als die erzwungene Strahlung, welche in dieser Hinsicht mit der primären Strahlung (Kurve II) wenigstens annähernd übereinstimmte. Bei dem Kugelgitter (vgl. Fig. 12, p. 612) verhielt es sich dagegen umgekehrt. Eine Mittelstellung scheint das aus geradlinigen Drähten bestehende Gitter (Fig. 13, p. 613) eingenommen zu haben. Von den beiden Komponenten, aus welchen sich die an einem Resonatorensystem reflektierte Strahlung im allgemeinen zusammensetzt, ist also die eine Komponente für das Resonatorensystem und die andere Komponente für die einfallenden Wellen (bzw. für den Erreger) charakteristisch.

Die Ergebnisse der hier und auf p. 611—613 beschriebenen Versuche bilden ein Analogon zu den von Barkla und Sadler<sup>1)</sup> nachgewiesenen Zusammensetzung der sekundären Röntgenstrahlung aus einer zerstreuten Strahlung („scattered radiation“) und einer *Eigenstrahlung* („homogenous radiation“). Das Kugelgitter und ebenso das aus geradlinigen Resonatoren bestehende Gitter, bei denen die zerstreute (erzwungene) Strahlung die Hauptrolle spielt, verhalten sich ähnlich wie Elemente von geringerem Atomgewicht (wie H, O und C), bei welchen die sekundäre Röntgenstrahlung hauptsächlich eine zerstreute Strahlung ist, während das aus ringförmigen Elementen bestehende Gitter ein Analogon zu den Elementen von höherem Atomgewicht bildet, bei welchen eine deutliche Superposition der beiden Arten der sekundären Röntgenstrahlung vorkommt.

1) G. G. Barkla u. A. Sadler, Phil. Mag. 16. p. 550. 1908.

Der Gedanke von einer Zergliederung der von Resonatoren ausgehenden „sekundären“ elektromagnetischen Strahlung in eine Eigenstrahlung und eine zerstreute Strahlung wurde von mir schon im Jahre 1901 ausgesprochen.<sup>1)</sup> Durch die obigen Versuche wird die Richtigkeit dieser Annahme bestätigt.

Helsingfors, Phys. Inst. d. Univ., im Mai 1914.

---

1) K. F. Lindman, *Über stationäre elektrische Wellen*, Dissertation Helsingfors 1901, p. 44.

(Eingegangen 24. Juni 1914.)

---

**Berichtigung.**

In meinen letzten in diesen Annalen veröffentlichten Abhandlungen kommen einige Fehler vor, die ich hier berichtige:

Bd. 40, 1913, p. 1013, Zeile 3 u. 4 von oben lies 0,5 und 23,8 cm statt 0,6 und 23,7 cm,

Bd. 40, 1913, p. 1017, Zeile 1 von oben lies Leitern statt Seiten,

Bd. 42, 1913, p. 35: Die unten rechts vorkommenden fettgedruckten Zahlen 35 und 31 sollen mit den Plätzen tauschen.

---

**6. Bemerkung zu der Arbeit B. Baules:  
 „Theoretische Behandlung der Erscheinungen in  
 verdünnten Gasen“;  
 von M. v. Smoluchowski.**

In der unter obigem Titel in diesen Annalen<sup>1)</sup> unlängst veröffentlichten Abhandlung bespricht Hr. Baule einige meiner Arbeiten über diesen Gegenstand, jedoch ist hierbei ein Mißverständnis unterlaufen, welches ich richtig stellen möchte.

Hr. Baule behauptet nämlich (p. 147, 148, 166), daß ich die Konstanten  $\beta$ , bzw.  $f$ , welche für den Temperatursprung und für die Gleitung maßgebend sind, für identisch halte, und bekämpft die Richtigkeit dieser, angeblich von mir verfochtenen „alten Theorie“. Nun aber war ich im Gegenteil von Anfang an der Meinung, daß jene phänomenologischen Konstanten bei Gleitung und Temperatursprung eine abweichende mechanische Bedeutung haben<sup>2)</sup> und verschiedene Werte besitzen.

Es schien gar nicht nötig, letzteres eigens zu betonen, da ja seit Kundt und Warburg bekannt war, daß der Gleitungs-koeffizient für Luft und Wasserstoff an Glaswänden ungefähr gleich der mittleren Weglänge ist, während meine Versuche für den Temperatursprungkoeffizienten jener Gase die Werte ergeben hatten:  $\gamma = 1,7 \lambda$  für Luft und  $\gamma = 7,0 \lambda$  für Wasserstoff. Ebenso wies der Wasserstoff bei Kontakt mit Nickel- oder Goldflächen abnorm hohe Werte auf. Diese abnormen Werte hatte ich schon damals<sup>3)</sup> auf die Kleinheit des Molekulargewichtes des Wasserstoffs zurückgeführt und hatte eine kinetische Interpretation jener Koeffizienten skizziert, deren Grundgedanke mit der jetzigen, allerdings strengeren und viel weiter im Detail ausgebauten Berechnungsweise Baules verwandt ist.

1) B. Baule, Ann. d. Phys. 43. p. 145. 1914.

2) Es ist doch klar, daß Maxwells Annahmen betreffs Reflexion und Zerstreuung der Moleküle nur als Mittel zur mathematischen Formulierung aber nicht als Bild des wirklichen Vorganges aufgefaßt werden müssen.

3) M. v. Smoluchowski, Wien. Sitzungsber. 107. p. 326. 1898; Phil. Mag. 46. p. 206. 1898.

Vielleicht mag Hr. Baule eine Stelle meiner späteren Arbeit<sup>1)</sup> mißverstanden haben, wo von den Zahlenwerten jener Konstanten für thermische und mechanische Vorgänge die Rede ist; doch habe ich ebendasselbst im nächsten Absatz p. 993 ganz ausdrücklich erklärt, daß jene zwei Größen (die Werte von  $f$  für Gleitung und Temperatursprung) „gewiß einigermaßen verwandt aber durchaus nicht identisch sind“, und habe deswegen vor der Knudsenschen Bezeichnungsweise der thermisch vollkommen ausgleichenden Körper als „rauhe Körper“ gewarnt. Auch basieren die Rechnungen der folgenden Abschnitte (l. c.) auf der Voraussetzung (vgl. Anmerkung), daß die Wände zwar als vollkommen diffus reflektierend, aber durchaus nicht vollkommen thermisch ausgleichend angesehen werden können. Auf denselben Unterschied habe ich ebenfalls ausdrücklich an einem anderen Orte<sup>2)</sup> hingewiesen.

Die Ansicht, daß die beiden Ausgleichskoeffizienten identisch seien und daß  $\delta/\gamma = 8/15$  sein müsse, ist allerdings im Jahre 1913 von Timiriazeff verfochten worden, welcher sich auf einige Resultate meiner Arbeiten beruft, doch habe ich mich derselben niemals angeschlossen und bin für deren Entstehung nicht verantwortlich.

Vielleicht hätte ich allerdings schon damals ausdrücklich dagegen protestieren sollen, nun aber möchte ich nicht ein zweites Mal verschulden, daß man mir gegenüber den Grundsatz anwende „qui tacet, consentire videtur“.

In den Berechnungen Hrn. Baules erblicke ich somit nicht eine Widerlegung meiner Anschauungen, sondern eine Bestätigung und einen weiteren Ausbau derselben. Sie bilden gewiß einen Fortschritt in der theoretischen Erkenntnis jener Erscheinungen und es ist überraschend, daß auch die experimentelle Vergleichung trotz mancher schwer definierbarer Fehlerquellen, wie Rauigkeit der Oberfläche, Verunreinigung derselben, Oxydschichten u. dgl. so gut stimmt.

1) M. v. Smoluchowski, Ann. d. Phys. 35. p. 992. 1911.

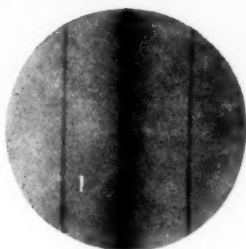
2) M. v. Smoluchowski, Phil. Mag. 21. p. 14. 1911.

(Eingegangen 6. Juni 1914.)

Druckfehlerberichtigung: Ann. d. Phys. 45. p. 237. 1914. Anm. 1 muß es statt Rob. Koch-Stiftung, Rob. Bosch-Stiftung heißen.

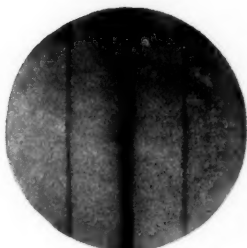
Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Fig. 9.



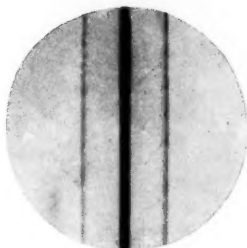
Aufn. 40  
 $a = 4,2 \text{ cm}$   
 $\beta = 0,5$

Fig. 10.



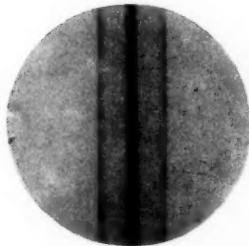
Aufn. 39  
 $a = 4,2 \text{ cm}$   
 $\beta = 0,6$

Fig. 11.



Aufn. 54  
 $a = 4,2 \text{ cm}$   
 $\beta = 0,7$

Fig. 12.



Aufn. 37  
 $a = 4,2 \text{ cm}$   
 $\beta = 0,8$

Fig. 13.



Aufn. 47  
 $a = 5,2 \text{ cm}$   
 $\beta = 0,8$

